Qualifica 2024 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

5 marzo 2024

Il progetto è sponsorizzato da

Materiale elaborato dalla collaborazione fra

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo https://gas.olifis.it/about-us/

$\mathcal{P}1$ Pallina rimbalzante

Sia $t_0 = \sqrt{2h/g}$ il tempo che impiega la pallina a cadere al suolo la prima volta. Nel momento in cui essa tocca il suolo, la sua velocità cambia di segno e viene moltiplicata per un fattore $\varepsilon = 0.5$. Visto che la pallina si muove di moto uniformemente accelerato, il tempo che essa impiega per tornare ad avere velocità nulla è proporzionale alla sua velocità al livello del suolo, quindi vale εt_0; un ulteriore tempo εt_0 sarà poi necessario a cadere nuovamente verso il suolo. Similmente, i tempi di caduta e discesa acquisiscono un fattore ε dopo ogni rimbalzo. Riassumendo, il tempo totale fino al quinto rimbalzo sarà

$$T = t_0 + 2\varepsilon t_0 + 2\varepsilon^2 t_0 + 2\varepsilon^3 t_0 + 2\varepsilon^3 t_0 + 2\varepsilon^4 t_0 = t_0(2(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4) - 1).$$

Usando la formula per la somma dei termini di una progressione geometrica, l'espressione precedente si può ulteriormente semplificare come segue:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\left(2\frac{1-\varepsilon^5}{1-\varepsilon} - 1\right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \times \frac{23}{8}.$$

Risposta: $\boxed{1.2984\,\mathrm{s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}2$ Cilindro in un angolo

Siano N_1 e F_1 i moduli della reazione normale e della forza d'attrito con il pavimento, e N_1 e F_1 le stesse quantità relative al muro. Poiché in entrambi i casi l'attrito è dinamico, abbiamo $F_1 = \mu N_1$ e $F_2 = \mu N_2$. L'equilibrio delle forze lungo le direzioni verticale e orizzontale impone

$$\begin{cases} -mg + N_1 + \mu N_2 = 0 \\ \mu N_1 - N_2 = 0, \end{cases}$$

dove m è la massa del cilindro. Risolvendo il sistema, si trova $N_1 = mg/(1+\mu^2)$ e $N_2 = \mu mg/(1+\mu^2)$. Si noti che $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ sempre, quindi il cilindro non può mai perdere contatto con il pavimento né con il muro. Il modulo del momento torcente esercitato dalle forze d'attrito, calcolato rispetto al centro del cilindro, vale $\tau = R(F_1 + F_2) = mgR\mu(1+\mu)/(1+\mu^2)$, dove R è il raggio del cilindro. Poiché il momento d'inerzia vale mR^2, il tempo necessario a fermare la rotazione è

$$T = \omega_0 \frac{mR^2}{\tau} = \frac{\omega_0 R}{g}\frac{1+\mu^2}{\mu(1+\mu)},$$

dove ω_0 è la velocità angolare iniziale.

Risposta: $\boxed{2.9572 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}3$ Rinormalizzazione della massa dell'elettrone

Possiamo sfruttare la relazione di Einstein $E = m_e c^2$ per determinare l'energia E a riposto dell'elettrone in funzione della sua massa. Per quanto affermato nel testo, tale energia va attribuita completamente al campo elettromagnetico dell'elettrone. Essendo l'elettrone a riposo, calcoliamo l'energia immagazzinata nel suo campo elettrico, e ricaviamone il raggio R imponendo la relazione di Einstein.
Il modo più semplice di calcolare l'energia potenziale elettrostatica di una sfera cava carica è assemblare la configurazione portando la carica dall'infinito. Immaginando che in un dato instante la sfera abbia

carica q e che la carica che portiamo dall'infinito sia dq, possiamo trovare l'energia potenziale integrando:

$$U = \int_0^e \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,\mathrm{d}q}{R} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Un'altra possibile via per ottenere lo stesso risultato è notare che, nel modello considerato, l'elettrone è assimilabile a un conduttore con carica totale $q = -e$ e avente potenziale elettrico $V = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R}$ rispetto all'infinito, perciò la sua energia vale

$$U = \frac{qV}{2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Una terza via consiste nell'integrare in tutto lo spazio l'espressione per la densità volumica di energia elettrica, $u = \varepsilon_0|\vec{E}|^2/2$, dove $|\vec{E}|$ è il modulo del campo elettrico. Lasciamo il calcolo come esercizio per il lettore.
In ogni caso, una volta nota U, sfruttiamo l'identificazione $U = E$ per ricavare

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = m_e c^2 \Rightarrow R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_e c^2}.$$

Risposta: $\boxed{1.4089 \times 10^{-15}\,\mathrm{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}4$ Modellino di nave

Immaginiamo di "congelare" in un certo istante lo stato della nave e delle onde in un certo volume di spazio, e di ricrearne una copia identica in cui tutte le lunghezze sono 35 volte più piccole. Tutti i rapporti tra le lunghezze, i volumi e le masse delle varie parti del sistema sono identiche alle precedenti: questo vuol dire che anche le forze saranno proporzionali alle precedenti, e il sistema evolverà come quello originario, ma "in miniatura". L'unica cosa che cambia sono i valori delle quantità dimensionali. L'accelerazione di gravità g è uguale in entrambi i casi, mentre il lato L del volume di spazio considerato si riduce di un fattore 35. Non esiste un'altra scala assoluta di lunghezza che sia rilevante per il problema. L'unica combinazione di L e g con le dimensioni di un tempo è $\sqrt{L/g}$, per cui $f = 1/\sqrt{35}$.
Nota: in realtà, per onde di dimensione pari o inferiore a pochi centimetri, esiste una scala di lunghezza assoluta, dovuta alla tensione superficiale dell'acqua. Un modellino di nave in scala 1 : 35, tuttavia, è sicuramente più lungo di pochi centimetri.

Risposta: $\boxed{1.6903 \times 10^{-1}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}5$ Oscillazioni di precisione

Il periodo di un pendolo in regime di piccole oscillazioni vale $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, dove L è la lunghezza del pendolo, da cui si ricava l'accelerazione di gravità

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}.$$

Questa relazione implica che l'errore relativo associato a g è

$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2} \leq r,$$

dove δL è l'incertezza assoluta su L, δT è l'incertezza assoluta sul periodo di una singola oscillazione ed r è l'incertezza relativa con cui Marco vuole misurare g. L'incertezza sulla durata di una singola oscillazione vale

$$\delta T = \frac{\Delta T}{N},$$

dove $\Delta T = 0.5\,\mathrm{s}$ è l'incertezza totale, fornita nel testo, e N è il numero di oscillazioni. Il minimo numero di oscillazioni complete è quindi

$$N = \left\lceil 2\frac{\Delta T}{T}\left(r^2 - \left(\frac{\delta L}{L}\right)^2\right)^{-1/2}\right\rceil = 160,$$

dove le parentesi $\lceil \dots \rceil$ indicano una approssimazione per eccesso.
Nota: sommare gli errori in quadratura è l'operazione corretta quando gli errori non sono correlati statisticamente tra loro, come in questo caso. In caso di completa correlazione, si otterrebbe invece una somma lineare,

$$\frac{\delta g}{g} = \frac{\delta L}{L} + 2\frac{\delta T}{T} \le r,$$

da cui

$$N = \left\lceil 2\frac{\Delta T}{T}\left(r - \frac{\delta L}{L}\right)^{-1}\right\rceil = 206.$$

Il valore centrale e la precisione richiesta della risposta sono stati scelti in modo da accettare i risultati ottenuti con entrambe le procedure.

Risposta: $\boxed{1.8000 \times 10^2.}$ *Errore massimo consentito:* 16.0%.

$\mathcal{P}6$ Temperatura di un pianeta

Poiché il pianeta è omogeneo, la potenza generata dal materiale contenuto in una sfera di raggio r è

$$P(r) = P\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = P\frac{r^3}{R^3},$$

dove $P = P(R)$ è la potenza totale generata dal pianeta e R è il suo raggio. All'equilibrio, tutta la potenza prodotta dal decadimento deve essere trasportata verso l'esterno. Imponiamo dunque la legge di Fourier per il trasporto di calore,

$$P(r) = -kS(r)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r},$$

dove k è la conducibilità termica, $S(r) = 4\pi r^2$ è la superficie dello strato sferico di raggio r ed il segno meno è dovuto al fatto che il calore fluisce dagli strati più caldi verso gli strati più freddi. Integrando l'equazione precedente, otteniamo

$$\int_0^R \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{4\pi k R^3}\int_0^R r\,\mathrm{d}r \implies T_C = \frac{P}{8\pi\alpha R} + T_S.$$

Per la legge di Stefan-Boltzmann, si ha che $P = 4\pi\sigma R^2 T_S^4$, quindi l'equazione diventa

$$T_C = T_S + \frac{\sigma R}{2\alpha}T_S^4.$$

Questa è un'equazione quartica in T_S, che va perciò risolta numericamente. È utile definire delle variabili adimensionali,

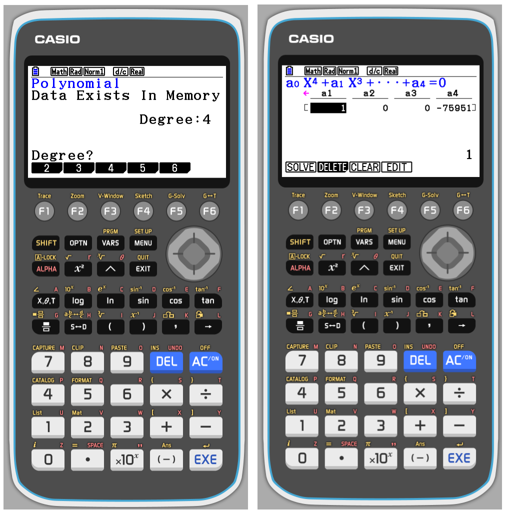
$$x \equiv \left(\frac{\sigma R}{2\alpha}\right)^{1/3} T_S, \qquad x_0 \equiv \left(\frac{\sigma R}{2\alpha}\right)^{1/3} T_C,$$

per cui l'equazione diventa

$$x_0 = x + x^4.$$

Esistono due soluzioni reali, di segno opposto: quella negativa non è fisica, mentre quella positiva è la risposta cercata.

Mostriamo ora come si può risolvere questa equazione utilizzando una calcolatrice, per esempio la Casio fx-CG50. Poiché l'equazione è polinomiale, possiamo sfruttare delle routine specializzate per questo tipo di equazioni. Aprendo il menu "Equation", scegliamo di usare le routine "Polynomial". Come mostrato in figura, è necessario inserire il grado (in questo caso, 4) del polinomio di cui vogliamo trovare le radici. Nella schermata successiva dobbiamo inserirne i coefficienti, che nel nostro caso valgono $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = -x_0$, come mostrato in figura. Premendo il tasto "SOLVE", otteniamo le due soluzioni reali di cui sopra.



Risposta: $\boxed{2.1856 \times 10^2\,\text{K.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}7$ Alta precisione

Poiché il raggio della terra $R_\oplus$ è molto maggiore della profondità media degli oceani H, possiamo approssimare il volume V_{oc} di questi ultimi ignorando la curvatura e dunque moltiplicando la loro superficie:

$$V_{\text{oc}} = 0.7 \cdot 4\pi R_\oplus^2 H.$$

Il volume di un tipico bicchiere d'acqua può essere stimato, ad esempio, supponendo che abbia raggio $r = 3\,\text{cm}$ e altezza $h = 10\,\text{cm}$, nel qual caso $V_{\text{bic}} = \pi r^2 h \approx 0.28\,\text{L}$. L'innalzamento relativo del livello medio degli oceani vale dunque

$$\frac{V_{\text{bic}}}{V_{\text{oc}}} = \frac{\pi r^2 h}{0.7 \cdot 4\pi R_\oplus^2 H}.$$

Stime comprese nell'intervallo $0.125\,\text{L} < V_{\text{bic}} < 0.5\,\text{L}$ sono considerate accettabili.

Risposta: $\boxed{1.7483 \times 10^{-22}.}$ *Errore massimo consentito:* 100.0%.

$\mathcal{P}8$ Corrente dopo lo switch

Poiché prima dell'inversione di polarità non scorre corrente nel circuito, il condensatore deve avere ai suoi capi una differenza di potenziale Q/C identica a quella del generatore V_0, ma diretta in verso opposto. Immediatamente dopo l'inversione di polarità, le due differenze di potenziale saranno uguali e dirette nello stesso verso, quindi per la prima legge di Kirchhoff l'intensità di corrente che scorre nel circuito vale

$$I = \frac{V_0 + Q/C}{R} = \frac{2V_0}{R}.$$

Risposta: $\boxed{1.2000 \times 10^{-2}\,\text{A.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$9 Corsetta

Sia $t(s)$ il tempo in funzione dello spazio percorso, ossia la funzione inversa della legge oraria. Come evidente dalle unità di misura, il ritmo r è il reciproco della velocità v:

$$r(s) \equiv \frac{1}{v(s)} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}.$$

Analogamente, il tasso di variazione del ritmo, $a = 5\,\mathrm{s/km^2}$, indica come varia quest'ultimo in funzione dello spazio percorso:

$$a \equiv -\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2},$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che se Fabio aumenta il suo ritmo di corsa, cioè accelera, la velocità cresce e quindi r diminuisce in modulo. La funzione $t(s)$ rispetta dunque le stesse equazioni che rispetterebbe $s(t)$ se ci trovassimo in presenza di un moto uniformemente accelerato. Possiamo quindi scrivere

$$t(s) = t_0 + r_0 s - \frac{1}{2} a s^2,$$

dove $t_0 = 0$ è il tempo iniziale e $r_0 = 5\,\mathrm{min/km}$ è il ritmo iniziale. La risposta si trova ponendo $s = 7.5\,\mathrm{km}$ in quest'ultima equazione.

Risposta: $\boxed{3.5156 \times 10^1\ \mathrm{min.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$10 Cilindro in acqua

Poiché l'altezza del cilindro è molto maggiore del suo diametro, approssimiamolo ad un'asta di spessore trascurabile. Due forze agiscono sul cilindro: il peso e la forza di Archimede. Quando il punto di applicazione di quest'ultima si trova più in basso del centro di massa e il cilindro è inclinato di un piccolo angolo rispetto alla verticale, il momento della forza di Archimede tende a farlo inclinare ancora di più: l'equilibrio è dunque instabile e il cilindro ruoterà verso un nuovo punto di equilibrio, stavolta stabile. Al contrario, se la forza di Archimede è applicata al di sopra del centro di massa, l'equilibrio è stabile e il cilindro rimane nella posizione con l'asse verticale.
Il centro di massa si trova ad un'altezza

$$H_p = \frac{\rho V h/2}{\rho V + M}$$

al di sopra della base inferiore, dove ρ è la densità del cilindro, V è il suo volume e h è la sua altezza. La forza di Archimede è invece applicata ad un'altezza $H_A = h'/2$, dove

$$h' = \frac{\rho V + M}{A\rho_\mathrm{a}},$$

è la lunghezza della parte immersa del cilindro e A è l'area di base. Imponendo $H_p = H_A$ troviamo

$$\frac{\rho V}{\rho V + M} \cdot \frac{h}{2} = \frac{\rho V + M}{2A\rho_\mathrm{a}} \implies \rho_\mathrm{a} \rho V^2 = (\rho V + M)^2.$$

Da qui possiamo quindi ricavare

$$M = (\sqrt{\rho_\mathrm{a}\rho} - \rho)V.$$

Risposta: $\boxed{1.6000 \times 10^3\ \mathrm{kg.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$11 Sottomarino difettoso

Per la Legge di Stevino, la pressione dell'acqua alla profondità del sottomarino vale

$$p_1 = p_0 + \rho_a g h,$$

dove $h = 70\,\mathrm{m}$. L'acqua smette di entrare quando la pressione dell'aria nel sottomarino vale anch'essa p_1. Poiché l'aria non scambia calore durante il processo, essa subisce una compressione adiabatica. Vale quindi

$$p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_0^{1-\gamma} T_0^{\gamma},$$

dove $\gamma = 7/5$ è il coefficiente adiabatico di un gas biatomico e T_1 è la temperatura finale. Da qui, troviamo

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{\rho_a g h}{p_0}\right)^{1-1/\gamma}.$$

Risposta: $\boxed{2.5356 \times 10^2\,^\circ\mathrm{C}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$12 Sensibilità della retina

L'energia di un fotone appartenente a un fascio di luce con lunghezza d'onda lambda è

$$E = \frac{hc}{\lambda},$$

dove h è la costante di Planck e c la velocità della luce. Pertanto, se il fascio trasmette n fotoni per unità di tempo, la sua potenza è $P = nE = nhc/\lambda$. La condizione presente nel testo equivale a dire che, affinché il segnale sia trasmesso, deve essere $n \geq 5/(100\,\mathrm{ms}) \equiv n_0$. La potenza minima cercata è dunque

$$P_{\min} = \frac{n_0 hc}{\lambda}.$$

Risposta: $\boxed{1.8059 \times 10^{-17}\,\mathrm{W}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$13 Cosmocronologia nucleare

Il numero di atomi di U^{235} e U^{238} evolve nel tempo come segue

$$\begin{cases} N_{235}(t) = N_0 2^{-t/\tau_{235}}, \\ N_{238}(t) = N_0 2^{-t/\tau_{238}}, \end{cases}$$

dove il tempo è misurato a partire dal momento della coalescenza delle stelle di neutroni, N_0 è il numero iniziale di atomi di ciascun isotopo, e τ_{235} e τ_{238} sono i tempi di dimezzamento forniti nel testo. Prendendo il rapporto tra le due equazioni, troviamo

$$\frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)} = 2^{-(\tau_{235}^{-1} - \tau_{238}^{-1})t} \implies t = \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}}\right)^{-1} \log_2 \frac{N_{235}(t)}{N_{238}(t)}.$$

Sostituendo $N_{235}(t)/N_{238}(t) = 0.72/99.28$ si trova la risposta voluta.

Risposta: $\boxed{5.9374 \times 10^9\,\mathrm{anni}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

Il progetto è sponsorizzato da