

Finale nazionale 2024 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

12 aprile 2024



Il progetto è sponsorizzato da



CASIO



Materiale elaborato dalla collaborazione fra

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo <https://gas.olifis.it/about-us/>

NOTA BENE

Il seguente materiale è distribuito secondo la licenza CC-BY-NC. È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali. I dettagli della licenza CC-BY-NC si possono leggere all'url <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.0/it/>.



\mathcal{P}_1 Dislivello in un tubo ad U

Poiché l'olio non è solubile e ha densità minore di quella dell'acqua, esso si disporrà sopra l'acqua, formando una colonna di altezza $h_{\text{olio}} = V/S$, dove V è il volume di olio ed S la sezione del tubo. Sul pelo libero di entrambi i rami del tubo la pressione è quella atmosferica p_0 , mentre la pressione alla base della colonna di olio può essere trovata tramite la legge di Stevino:

$$p_{\text{olio}} = p_0 + \rho_{\text{olio}}gh_{\text{olio}},$$

dove ρ_{olio} è la densità dell'olio. Essendo l'acqua all'equilibrio idrostatico, nell'altro ramo del tubo, alla stessa altezza della base della colonna d'olio, dovrà esserci una pressione uguale,

$$p_{\text{olio}} = p_{\text{atm}} + \rho_a gh_a,$$

dove h_a è l'altezza della colonna d'acqua al di sopra di tale punto. Da qui troviamo $h_a = h_{\text{olio}}\rho_{\text{olio}}/\rho_a$ e la differenza di altezza

$$\Delta h = h_{\text{olio}} - h_a = \frac{V}{S} \left(1 - \frac{\rho_{\text{olio}}}{\rho_a} \right).$$

Risposta: 2.1333×10^{-2} m. Errore massimo consentito: 0.5%.

\mathcal{P}_2 Circuito ignoto

Il più generale circuito puramente resistivo a 3 terminali si può disegnare come in fig. 1 (*sinistra*). Per

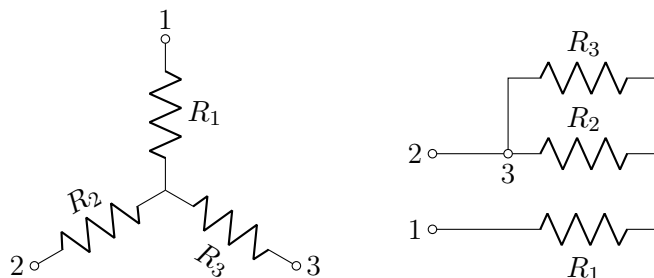


Figura 1: a sinistra, circuito resistivo generale a 3 terminali. A destra, il circuito quando i terminali 2 e 3 sono cortocircuitati.

dimostrarlo, consideriamo le due seguenti situazioni:

1. una corrente I scorre da 1 a 2 (ai potenziali $V_1^{(1)}$ e $V_2^{(1)}$ rispettivamente), mentre 3 è lasciato libero (al potenziale $V_3^{(1)}$);
2. una corrente I scorre da 2 a 3 (ai potenziali $V_2^{(2)}$ e $V_3^{(2)}$ rispettivamente), mentre 1 è lasciato libero (al potenziale $V_1^{(2)}$).

Prendendo la sovrapposizione lineare delle due, troviamo una corrente I che scorre da 1 a 3, mentre 2 è lasciato libero. Visto che massimi e minimi del potenziale si trovano sempre trovarsi ai capi di un circuito, deve valere $V_3^{(1)} \geq V_2^{(1)}$ e $V_2^{(2)} \geq V_1^{(2)}$. Dunque

$$R_{13}I = V_1^{(1)} + V_1^{(2)} - V_3^{(1)} - V_3^{(2)} \leq V_1^{(1)} + V_2^{(2)} - V_2^{(1)} - V_3^{(2)} = R_{12}I + R_{23}I.$$



Le resistenze R_{12} , R_{13} e R_{23} soddisfano quindi la disuguaglianza triangolare, per cui è possibile esprimerle come

$$\begin{cases} R_{12} = R_1 + R_2 \\ R_{13} = R_1 + R_3 \\ R_{23} = R_2 + R_3, \end{cases}$$

per tre valori positivi incogniti R_1 , R_2 , R_3 . Questo sistema di 3 equazioni e 3 incognite corrisponde al circuito in fig. 1 (*sinistra*). Una volta ottenuti i valori delle resistenze R_1 , R_2 , R_3 , la quantità richiesta si ottiene come serie di R_1 con il parallelo di R_2 e R_3 , come in fig. 1 (*destra*), cioè

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1.$$

Risposta: $\boxed{8.9375 \Omega}$. Errore massimo consentito: 0.5%.

\mathcal{P}_3 Dilatazione termica in un contenitore

Sia β il coefficiente di dilatazione termica lineare del liquido. Il volume del liquido dopo la variazione di temperatura vale

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta T)^3 = \pi R_0^2 h_0 (1 + \beta \Delta T)^3 \approx \pi R_0^2 h_0 (1 + 3\beta \Delta T),$$

dove $V_0 = \pi R_0^2 h_0$ e R_0 sono rispettivamente il volume iniziale del liquido ed il raggio iniziale del contenitore, mentre $h = 1200.0$ mm e $\Delta T = 50^\circ\text{C}$. Ricordandosi che la scala graduata si espande insieme al contenitore, l'informazione sull'altezza finale del pelo del liquido fornita nel testo si traduce in

$$V = \pi R^2 h (1 + \alpha \Delta T) = \pi R_0^2 h (1 + \alpha \Delta T)^3 \approx \pi R_0^2 h (1 + 3\alpha \Delta T),$$

dove R è il raggio del contenitore dopo l'aumento di temperatura e $h = 1202.7$ mm. Eguagliando le due espressioni per V si giunge all'equazione

$$h_0 (1 + 3\beta \Delta T) = h (1 + 3\alpha \Delta T),$$

la cui soluzione è

$$\beta = \alpha \frac{h}{h_0} + \frac{h - h_0}{3 h_0 \Delta T}.$$

Il valore centrale della risposta, che si discosta dello 0.1% dall'espressione precedente, è calcolato evitando di approssimare $(1 + \alpha \Delta T)^3$ con $1 + 3\alpha \Delta T$, e similmente per $(1 + \beta \Delta T)^3$.

Risposta: $\boxed{2.3495 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}}$. Errore massimo consentito: 0.5%.

\mathcal{P}_4 Freni a disco

Scomponiamo la pastiglia in settori circolari concentrici al disco di spessore infinitesimo $d\ell$, e calcoliamo il momento torcente totale τ come la somma di quello per ogni settore. Un settore circolare di raggio ℓ ha area $A = (\pi/2)\ell d\ell$, subisce una reazione normale pari a PA (dove P è la pressione applicata) e una forza d'attrito tangenziale pari a μPA , per cui

$$\tau = \int_r^R \ell(\mu P) \frac{\pi}{2} \ell d\ell = \mu P \frac{\pi}{2} \frac{R^3 - r^3}{3}.$$



Risposta: $6.1921 \times 10^1 \text{ Nm}$. Errore massimo consentito: 0.5%.

P5 Acqua e ghiaccio

Poiché la scatola è chiusa, si conserva la massa all'interno, data dalla somma di quella dell'acqua e quella del ghiaccio. Inoltre, poiché la scatola è rigida, si conserva il volume, anch'esso dato dalla somma di quello dell'acqua e quello del ghiaccio. Queste due condizioni formano un sistema di due equazioni,

$$\begin{cases} M = M_g + M_a \\ \frac{M}{\rho_a} = \frac{M_g}{\rho'_g} + \frac{M_a}{\rho'_a} \end{cases}$$

dove le quantità primarie indicano i valori finali. Da qui, si può ricavare

$$\frac{M_g}{M} = \frac{\rho'_a/\rho_a - 1}{\rho'_a/\rho'_g - 1}.$$

Nota: quando il sistema viene raffreddato, l'acqua non può convertirsi completamente in ghiaccio, perché occuperebbe un volume maggiore di quello della scatola. Allora quest'ultima esercita una pressione, sempre maggiore al diminuire della temperatura, che mantiene il sistema sempre sulla linea di coesistenza di acqua e ghiaccio nel piano temperatura–pressione.

Risposta: 3.9614×10^{-1} . Errore massimo consentito: 1.0%.

P6 Fotografia relativistica

Poniamo $v = 0.95c$ e $\Delta t = 1 \text{ s}$. Consideriamo un punto P posto nelle coordinate $(d, 0)$. Se esso compare nella fotografia, che la fotocamera scatta quando essa si trova nelle coordinate $(0, v\Delta t)$, allora la componente y della velocità del raggio luminoso originato in P e catturato dalla fotocamera è

$$v_y = \frac{cv\Delta t}{\sqrt{d^2 + (v\Delta t)^2}}.$$

L'informazione sul campo visivo della fotocamera si traduce nella condizione per cui un raggio luminoso viene catturato da essa solo se, nel sistema di riferimento inerziale solidale alla fotocamera, la componente della sua velocità lungo y è minore o uguale a zero. Pertanto la condizione da imporre è

$$v \geq v_y.$$

Da qui otteniamo il valore minimo per $|d|$:

$$d_{\min} = c\Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Risposta: $9.3610 \times 10^7 \text{ m}$. Errore massimo consentito: 0.5%.



P7 Fireball atomica

Il raggio della fireball dipende solo dall'energia E sprigionata dalla bomba, dalla densità dell'aria ρ e dal tempo t . Cerchiamo una combinazione di t , E e ρ con le dimensioni di una lunghezza, del tipo

$$t^\alpha E^\beta \rho^\gamma,$$

dove α , β e γ sono numeri reali. Eseguendo analisi dimensionale su questa espressione, troviamo

$$[L] = [T]^\alpha \left(\frac{[M][L]^2}{[T]^2} \right)^\beta \left(\frac{[M]}{[L]^3} \right)^\gamma,$$

dove abbiamo indicato con $[L]$ le lunghezze, $[T]$ i tempi e $[M]$ le masse. Eguagliando le dimensioni di entrambi i membri, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 1 = 2\beta - 3\gamma, \\ 0 = \alpha - 2\beta, \\ 0 = \beta + \gamma, \end{cases}$$

la cui soluzione è $\alpha = 2/5$, $\beta = 1/5$, $\gamma = -1/5$. Analogamente, si può mostrare che l'unica combinazione adimensionale delle tre quantità è una costante. Possiamo quindi scrivere

$$R(t) = f(t, E, \rho) = N t^{2/5} E^{1/5} \rho^{-1/5},$$

dove N è una costante, da cui

$$R(t_2) = R(t_1) \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{2/5},$$

dove $t_1 = 0.006$ s e $t_2 = 0.016$ s.

Risposta: $\boxed{1.1843 \times 10^2 \text{ m}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

P8 Discesa dal cilindro con attrito

Nella fase di discesa antecedente al momento in cui il cilindro inizia a strisciare si conserva l'energia meccanica totale. Chiamando v il modulo della velocità nel riferimento del laboratorio e ω la velocità angolare del cilindro intorno al suo centro di massa, vale

$$mg(R+r) = mg(R+r) \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2,$$

dove $I = \beta mr^2$ (con $\beta = 1$ nel caso di cilindro cavo) e $v = \omega r$ visto che il cilindro sta rotolando. Da qui, possiamo ricavare

$$v^2 = \frac{2g(R+r)}{1+\beta}(1 - \cos \theta).$$

Scomponendo le forze lungo la congiungente i due centri, possiamo trovare la reazione normale N in funzione dell'angolo θ :

$$m \frac{v^2}{R+r} = mg \cos \theta - N \implies N = mg \left(\cos \theta - \frac{2}{1+\beta}(1 - \cos \theta) \right).$$

La forza di attrito statico $F_A \leq \mu N$ applica un momento torcente τ sul cilindro ed è quindi responsabile per la sua accelerazione angolare:

$$F_A = \frac{\tau}{r} = \frac{I d\omega}{r dt} = \frac{I dv}{r^2 dt} = \beta m \frac{dv d\theta}{d\theta dt} = \frac{\beta m}{R+r} \frac{dv}{d\theta} v = \frac{\beta m}{2(R+r)} \frac{dv^2}{d\theta}.$$



Usando la formula trovata per $v(\theta)$ e inserendo le due espressioni per N e F_A in $F_a \leq \mu N$, otteniamo la disuguaglianza

$$\frac{\beta}{1+\beta} \sin \theta \leq \mu \left(\cos \theta - \frac{2}{1+\beta} (1 - \cos \theta) \right).$$

Ricordandoci che $\beta = 1$ e che $\mu = 0.5$, la disequazione precedente si semplifica a

$$\sin \theta \leq 2 \cos \theta - 1,$$

da studiare nell'intervallo $[0, \pi/2]$. Data la monotonia della funzione in questo intervallo, sarà sufficiente trovare l'angolo θ_0 per cui i due lati della disuguaglianza sono uguali. Elevando al quadrato entrambi i membri, troviamo

$$\cos \theta = \frac{4}{5}.$$

Risposta: $\boxed{3.6870 \times 10^1 \text{ }^\circ}$. Errore massimo consentito: 0.5%.

\mathcal{P}_9 Quanta energia rilascia la fissione nucleare? _____

L'energia rilasciata nella reazione si ottiene dalla formula di Einstein

$$E = \Delta mc^2 = (m_{\text{U}^{235}} + m_n - m_{\text{K}^{92}} - m_{\text{Ba}^{141}} - 3m_n)c^2.$$

Questa energia viene usata per lanciare verso l'alto il granello di sabbia, che in cima alla salita avrà velocità nulla ed una energia potenziale gravitazionale pari a

$$E = U_g = mg\Delta h = \frac{\pi}{6} d^3 \rho g \Delta h,$$

dove d è il diametro, ρ è la densità del quarzo e Δh l'altezza del salto. Quest'ultima vale quindi

$$\Delta h = \frac{6c^2}{\pi d^3 \rho g} (m_{\text{U}^{235}} - m_{\text{K}^{92}} - m_{\text{Ba}^{141}} - 2m_n).$$

Risposta: $\boxed{2.5510 \times 10^{-4} \text{ m}}$. Errore massimo consentito: 1.0%.

\mathcal{P}_{10} Raggio di luce in una goccia d'acqua _____

Siano α l'angolo di incidenza della luce sulla goccia e β l'angolo di rifrazione della luce appena entrata nella goccia. Essi sono legati dalla legge di Snell, $\sin \alpha = n \sin \beta$, dove $n = 1.33$. Per ogni riflessione e rifrazione, la normale al punto di incidenza giace in un piano che contiene anche i raggi entranti ed uscenti, nonché il centro della sfera. Di conseguenza, l'intero problema può essere schematizzato in una configurazione planare come in fig. 2.

La direzione del raggio viene deviata quattro volte:

- di un angolo $\alpha - \beta$ all'ingresso nella goccia;
- di un angolo $\pi - 2\beta$ alla prima riflessione;
- di un angolo $\pi - 2\beta$ alla seconda riflessione;
- di un angolo $\alpha - \beta$ all'uscita dalla goccia.

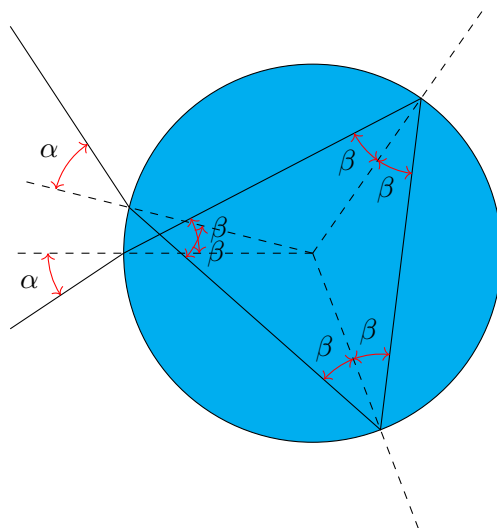


Figura 2: percorso dei raggi di luce nella goccia d'acqua

La deviazione totale vale dunque $2\pi + 2\alpha - 6\beta$. Affinché il raggio uscente sia ortogonale a quello entrante, questo risultato va eguagliato a $\pi/2$, a meno di multipli interi di π . L'equazione da risolvere è quindi:

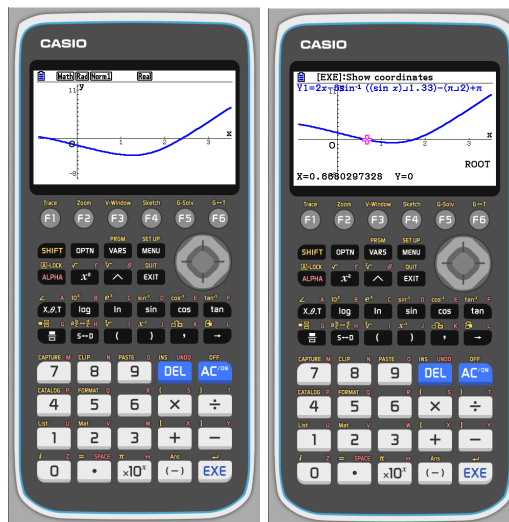
$$2\alpha - 6 \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (1)$$

con k numero intero e $0 < \alpha < \pi/2$. L'unico valore di k per il quale esiste una soluzione in questo intervallo è $k = -1$.

Questa equazione trascendente può essere risolta usando una calcolatrice grafica, per esempio la Casio fx CG50. Come visto anche negli allenamenti, uno dei modi più semplici di affrontare il problema è di considerare la funzione

$$f(x) = 2x - 6 \sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{n}\right) - \frac{\pi}{2} - k\pi, \quad (2)$$

graficarla usando il menù GRAPH e poi trovarne gli zeri. Iniziamo quindi entrando nel menù GRAPH e scrivendo questa funzione per $k = 0$. Premendo F6, cioè DRAW, vediamo il risultato in figura, e come si può notare, non ci sono intersezioni con l'asse x nell'intervallo di interesse, cioè $[0, \pi/2]$. Se invece inseriamo la funzione in eq. (2) per $k = 1$, come si vede in figura, effettivamente esiste una sola soluzione, che può essere trovata usando F5, cioè G-Solve, e chiedendo le radici (ROOT), come indicato nella stessa figura.



Risposta: $\boxed{3.8275 \times 10^1 \text{ }^\circ}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

P11 Mongolfiera

Sulla mongolfiera agiscono due forze, la forza peso e la spinta di Archimede F_A . La spinta di Archimede dipende dal volume della mongolfiera, che cambierà di una quantità trascurabile dopo aver eliminato le



zavorre. L'accelerazione iniziale della mongolfiera sarà quindi

$$a_0 = g - \frac{F_A}{m},$$

dove abbiamo indicato con m la massa totale. Dopo il rilascio delle zavorre di massa m_Z , la nuova accelerazione sarà

$$a_1 = g - \frac{F_A}{m - m_Z}.$$

Le due equazioni costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite F_A , m_Z . Risolvendolo, troviamo

$$m_Z = m \frac{a_0 - a_1}{g - a_1}.$$

Ricordiamo che, nelle convenzioni usate in questa soluzione, vale $a_0 > 0$, $g > 0$, $a_1 < 0$.

Risposta: $\boxed{8.0969 \times 10^1 \text{ kg.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

\mathcal{P}_{12} Luce polarizzata

Si usi come riferimento la direzione di polarizzazione della luce laser. Per ottenere in uscita la luce polarizzata con angolo θ rispetto alla direzione iniziale, è necessario disporre l'ultimo polarizzatore proprio in questa direzione. Il primo polarizzatore può invece essere posto in una arbitraria direzione α rispetto alla direzione iniziale. Usando la legge di Malus, l'intensità complessiva della luce laser si può scrivere

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \cos^2(\theta - \alpha) = I_0 \left(\frac{1}{2} (\cos \theta + \cos(2\alpha - \theta)) \right)^2,$$

che è massimizzato per $2\alpha = \theta$, risultando in una intensità luminosa

$$I = I_0 \frac{(1 + \cos \theta)^2}{4}.$$

La lampadina invece produce luce non polarizzata. Indipendentemente dall'angolo α del primo polarizzatore, l'intensità dopo il primo filtro sarà pari al valor medio di $\cos^2 \theta$ per $\theta \in [0, 2\pi]$, ovvero $1/2$. Si può disporre il primo filtro esattamente in direzione θ , in modo che il secondo filtro non causi una riduzione di intensità luminosa. Ponendo quindi uguali le due intensità, troviamo

$$I_0 \frac{1}{2} = I_0 \frac{(1 + \cos \theta)^2}{4} \implies \cos \theta = \sqrt{2} - 1,$$

che è la risposta.

Risposta: $\boxed{6.5530 \times 10^1 \text{ }^\circ.}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

\mathcal{P}_{13} Cambio di orbita

PRIMA SOLUZIONE. L'espressione del potenziale efficace al periapside e e apoapside,

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r},$$

dove E è l'energia meccanica, L è il modulo del momento angolare calcolato rispetto al centro attrattore, M è la massa del corpo attrattore e m è la massa del corpo puntiforme in orbita, ha come soluzioni



$r = a(1 \pm \epsilon)$, dove a è il semiasse maggiore e ϵ è l'eccentricità. Confrontando questa definizione con la soluzione dell'equazione quadratica per r , si trova

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 m^3}}.$$

Il punto di massima velocità è il periapside, nonché il punto dell'ellisse più vicino al centro attrattore. Un attimo prima del trasferimento del centro attrattore, l'energia meccanica del sistema vale

$$E_i = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{a-c},$$

dove v_p è la velocità al perielio, a è il semiasse maggiore, $c = \epsilon_i a$ è la semi-distanza focale e $\epsilon_i = 0.5$ è l'eccentricità iniziale. L'energia dopo il trasferimento del centro attrattore è

$$E_f = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{a+c} = \frac{GMm}{2a} \left(\frac{\epsilon_i^2 + 4\epsilon_i - 1}{1 - \epsilon_i^2} \right).$$

D'altro canto, il momento angolare finale vale

$$L_f = m(a+c)v_p = m(1+\epsilon_i)\sqrt{GMa \left(\frac{1+\epsilon_i}{1-\epsilon_i} \right)}.$$

Sostituendo le espressioni dell'energia e del momento angolare nell'equazione iniziale per l'eccentricità, si giunge a

$$\epsilon_f = \frac{\epsilon_i(\epsilon_i + 3)}{1 - \epsilon_i}.$$

Quindi, la nuova traiettoria è un'iperbole!

SECONDA SOLUZIONE. L'equazione delle orbite è

$$r = \frac{\ell}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

dove periapside e apoapside corrispondono a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ rispettivamente. Dopo il trasferimento del centro attrattore, la nuova orbita sia

$$r = \frac{\ell'}{1 + \epsilon' \cos \theta}.$$

Poiché $\ell \propto L^2$ e la distanza dal centro attrattore cambia di un fattore $(1 + \epsilon)/(1 - \epsilon)$, dovremo avere

$$\ell' = \ell \left(\frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^2.$$

Inoltre, il periapside della nuova orbita corrisponde all'apoapside della vecchia:

$$\frac{\ell'}{1 + \epsilon'} = \frac{\ell}{1 - \epsilon}.$$

Combinando le due equazioni, troviamo

$$\epsilon' = \frac{(1 + \epsilon)^2}{1 - \epsilon} - 1.$$

Risposta: Errore massimo consentito: 0.5%.



P₁₄ Quanto dista il satellite?

Poiché il satellite percorre una grande porzione del cielo in un intervallo di tempo piuttosto breve, esso si troverà presumibilmente in bassa orbita terrestre, ad un'altezza dal suolo $h \ll R_{\oplus}$. In prima approssimazione, possiamo quindi confondere il raggio della sua orbita con R_{\oplus} , cosicché la sua velocità orbitale sia $v \approx \sqrt{GM_{\oplus}/R_{\oplus}}$. La disuguaglianza $h \ll R_{\oplus}$ implica anche che dal suolo possiamo osservare una porzione molto piccola dell'orbita del satellite, che possiamo quindi approssimare ad una retta. L'altezza h del satellite può essere trovata tramite similitudine di triangoli:

$$h \approx \frac{H}{D} vt = \frac{H}{D} \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} T,$$

dove $t = 46$ s. Il risultato, inferiore a 550 km, conferma che il satellite si trova in bassa orbita terrestre, e che le assunzioni che abbiamo fatto sono giustificate.

Un calcolo più accurato, che tiene in conto della corretta velocità orbitale e della curvatura del tratto di orbita osservato, porta alla seguente equazione:

$$t = \sqrt{\frac{(R_{\oplus} + h)^3}{GM_{\oplus}}} \times 2 \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} \sin \alpha \right) \right),$$

dove $\alpha = \arctan(D/(2H))$. Una soluzione numerica per h si discosta dalla stima ottenuta in precedenza per meno del 5%.

Risposta: 5.2652×10^5 m. Errore massimo consentito: 5.0%.

P₁₅ Traiettoria elicoidale

Dato che l'elettrone si muove di moto elicoidale, si può scomporre la sua velocità in componenti,

$$\vec{v} = v_z \hat{z} + v_{\theta} \hat{\theta}.$$

dove v_z e v_{θ} (entrambe costanti) indicano le componenti della velocità lungo l'asse del filo e sul piano perpendicolare ad esso, rispettivamente. Con questa scrittura, la forza di Lorentz esercitata sull'elettrone sarà pari a

$$\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -e \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{v_z \mu_0 I}{2\pi r} \right) \hat{r} = -\frac{e}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\lambda - \frac{v_z I}{c^2} \right) \hat{r},$$

dove abbiamo indicato con r la distanza dell'elettrone dal filo, con λ la densità di carica lineare e con I l'intensità di corrente. Questa forza costituisce la forza centripeta necessaria a sostenere il moto, per cui

$$-m_e \frac{v_{\theta}^2}{r} = -\frac{e}{2\pi\epsilon_0 m_e r} \left(\lambda - \frac{v_z I}{c^2} \right) \implies v_{\theta}^2 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 m_e} \left(\lambda - \frac{v_z I}{c^2} \right),$$

che è una equazione che lega le due componenti della velocità dell'elettrone. Poiché il membro di sinistra è positivo, dovrà valere la disuguaglianza $v_z \leq \frac{\lambda c^2}{I}$. Dobbiamo minimizzare il modulo della velocità o, equivalentemente, il suo modulo quadro, cioè

$$v^2 = v_{\theta}^2 + v_z^2 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 m_e} \left(\lambda - \frac{v_z I}{c^2} \right) + v_z^2,$$

che è una funzione quadratica della componente z della velocità. Essendo il termine di secondo grado positivo, il minimo si troverà nel vertice

$$\overline{v_z} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{I}{c^2},$$



che in effetti soddisfa la condizione $\bar{v}_z < \frac{\lambda c^2}{I}$. Sostituendo questa espressione nella formula per il modulo quadro della velocità ed estraendone la radice, otteniamo il valore minimo della velocità,

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{e}{2\pi\epsilon_0 m_e} \left(\lambda - \frac{\bar{v}_z I}{c^2} \right) + \bar{v}_z^2} = \sqrt{\frac{e}{2\pi\epsilon_0 m_e} \lambda - \frac{1}{4} \left(\frac{e}{2\pi\epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{I^2}{c^4}}.$$

Risposta: 5.3401×10^4 m/s. Errore massimo consentito: 0.5%.

Il progetto è sponsorizzato da



CASIO