Qualifica 2025 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

11 marzo 2025

Il progetto è sponsorizzato da

Materiale elaborato dalla collaborazione fra

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo https://gas.olifis.it/about-us/

$\mathcal{P}1$ Aggiornamento software interstellare

Affinché l'aggiornamento software arrivi in tempo, è necessario che il tempo impiegato dalla sonda per andare dalla prima alla seconda stella sia minore del tempo impiegato dalla luce (alla cui velocità si muovono le fotografie trasmesse e il software) per andare dalla prima stella a Terra e poi dalla Terra alla seconda stella. Quindi è necessario che la sonda percorra 4 anni luce in non meno di $12 + 16 = 28$ anni, il che corrisponde a una velocità massima di $c/7$. Il tempo di poche ore impiegato dagli scienziati a preparare e inviare l'aggiornamento software modificherebbe il risultato di una frazione molto minore della precisione richiesta; perciò, è trascurabile.

Risposta: $\boxed{4.2827 \times 10^7\,\mathrm{m/s.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}2$ Pianeti allineati

Esistono due configurazioni possibili per l'allineamento: i pianeti si trovano dalla stessa parte rispetto alla stella, oppure la stella si trova tra i due pianeti. Questi due tipi di allineamento si alternano, passando dall'uno all'altro ogni qual volta il pianeta interno effettua mezzo giro in più di quello esterno. Poiché il pianeta esterno ha spazzato un angolo di 60°, esso ha percorso un sesto di giro, mentre il pianeta interno ha percorso mezzo giro più un sesto di giro. Quindi troviamo che

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) T_A = \frac{1}{6} T_B \implies T_B = 4T_A,$$

dove T_A è il periodo del pianeta interno e T_B è il periodo del pianeta esterno. Dalla terza legge di Keplero, troviamo che il rapporto dei raggi dei due pianeti è

$$\frac{R_B}{R_A} = \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{2/3} = 4^{2/3}.$$

Risposta: $\boxed{2.5198.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}3$ Pistone asimmetrico

Le forze esterne agenti sul sistema formato dai pistoni, dall'asta e dal gas sono:

- il peso (diretto verso il basso) del sistema, pari a Mg, dove $M = 3.0\,\mathrm{kg}$;
- la forza (diretta verso il basso) esercitata dall'aria sul pistone superiore, di area $A_1 = 110\,\mathrm{cm}^2$;
- la forza (diretta verso l'alto) esercitata dall'aria sul pistone inferiore, di area $A_2 = 95\,\mathrm{cm}^2$;
- la forza esercitata dalle pareti del tubo sul gas. Poiché i contributi delle pareti verticali si cancellano a vicenda, l'unico contributo rimanente è quello della parete (a forma di "anello", nel caso di cilindri circolari) orizzontale, la cui area $A_1 - A_2$.

L'equilibrio di tali forze richiede

$$Mg + p_0 A_1 = p_0 A_2 + p(A_1 - A_2) \implies p = p_0 + \frac{Mg}{A_1 - A_2}.$$

La trasformazione è dunque una isobara e la pressione iniziale dev'essere uguale a quella finale. Quando i pistoni si spostano di $\ell = 5\,\mathrm{cm}$ verso l'alto, il volume cambia di $\Delta V = (A_1 - A_2)\ell$. Dall'equazione dei gas ideali, troviamo quindi

$$T = \frac{p}{nR}V \implies \Delta T = \frac{p}{nR}\Delta V = \frac{\ell}{nR}\big((A_1 - A_2)p_0 + Mg\big),$$

dove ΔT è la variazione di temperatura richiesta.

Risposta: $\boxed{1.0909\,\mathrm{K}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}4$ Oscillazioni degli elettroni in un conduttore

Procediamo per analisi dimensionale, ponendo $\omega = n^\alpha e^\beta m_e^\gamma \epsilon_0^\delta$, dove ω è la frequenza di oscillazione, n è la densità numerica degli elettroni e α, β, γ e δ sono da determinare. Le dimensioni delle quantità in gioco sono $\dim n = \mathsf{L}^{-3}$, $\dim e = \mathsf{C}$, $\dim m_e = \mathsf{M}$ e $\dim \varepsilon_0 = \mathsf{C}^2\mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^{-3}\mathsf{T}^2$, dove L, C, M e T sono unità di lunghezza, carica, massa e tempo. Imponendo che $\dim \omega = \mathsf{T}^{-1}$ troviamo il sistema

$$\begin{cases} -3\alpha - 3\delta = 0 \\ \beta + 2\delta = 0 \\ \gamma - \delta = 0 \\ 2\delta = -1. \end{cases}$$

La prima e l'ultima equazione sono sufficienti a determinare $\alpha = 1/2$, perciò il rapporto richiesto è pari a $\sqrt{3}$.

Risposta: $\boxed{1.7321.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}5$ Lavori inefficienti

Il numero richiesto, N, è pari al rapporto tra il volume della piscina, $V_\mathrm{p} = 3750\,\mathrm{m}^3$, e il volume V del bicchiere di Manuele:

$$N = \frac{V_\mathrm{p}}{V}.$$

Un tipico bicchiere da tavola ha un volume pari a circa un quarto o un quinto di litro. L'intervallo di risposte accettate corrisponde alla stima $0.11\,\mathrm{L} < V < 0.44\,\mathrm{L}$.

Risposta: $\boxed{1.7045 \times 10^7.}$ *Errore massimo consentito:* 100.0%.

$\mathcal{P}6$ Tubo sul fondo di un lago

Il pistone si trova in una posizione di equilibrio quando la pressione del gas è pari alla pressione idrostatica, dunque

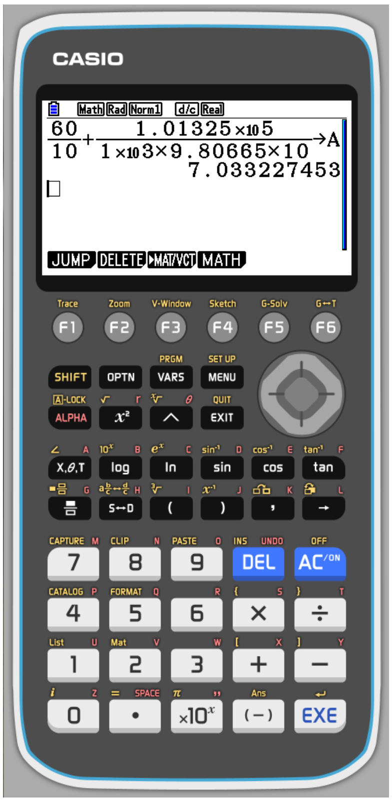
$$p = \rho_\mathrm{a} g h + p_0, \qquad p' = \rho_\mathrm{a} g(h - \ell - \Delta\ell) + p_0,$$

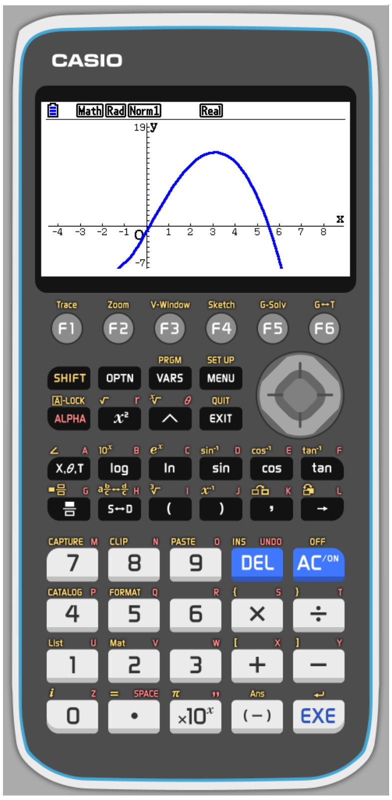
dove p è la pressione iniziale, p' quella finale, $h = 60\,\mathrm{m}$, $\ell = 10\,\mathrm{m}$ e $\Delta\ell$ è lo spostamento richiesto. Poiché le pareti sono isolanti, il gas subisce una espansione adiabatica, perciò $pV^\gamma = p'V'^\gamma$, dove $\gamma = 7/5$, $V = S\ell$ è il volume iniziale del gas, $V' = S(\ell + \Delta\ell)$ è il volume finale e S è la sezione del tubo. Sostituendo i valori di p e p' trovati in precedenza, questa equazione diventa

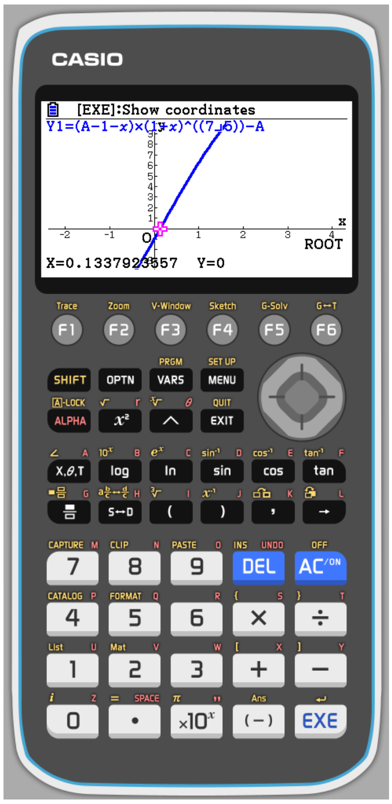
$$(\rho_\mathrm{a} g h + p_0) S(\ell + \Delta\ell) = (\rho_\mathrm{a} g(h - \ell - \Delta\ell) + p_0)(S(\ell + \Delta\ell))^{7/5}.$$

Dividendo entrambi i membri per $S\rho_\mathrm{a} g\ell$, otteniamo

$$\left(\frac{h}{\ell} + A\right) = \left(\frac{h}{\ell} + A - 1 - x\right)(1 + x)^{7/5},$$







dove $A = p_0/(\rho_a g\ell)$ e $x = \Delta\ell/\ell$. Questa equazione può essere risolta numericamente per x. Esistono due soluzioni, corrispondenti a $\Delta\ell = x\ell = 1.3379\,\mathrm{m}$ e $\Delta\ell = x\ell = 55.241\,\mathrm{m}$. La prima soluzione è un equilibrio stabile: infatti, il rapporto tra la pressione del gas e la pressione idrostatica (proporzionale all'inverso del secondo membro dell'equazione precedente) diminuisce all'aumentare di x. Quindi il pistone si ferma quando raggiunge $\Delta\ell = 1.3379\,\mathrm{m}$.
Vediamo come si può risolvere questa equazione numerica utilizzando una calcolatrice ammessa dal regolamento, per esempio una Casio fx CG-50. Notiamo innanzitutto che l'equazione dipende da un solo parametro, cioè $\alpha = h/\ell + A$, che compare due volte. Possiamo salvare il valore di questa quantità in una variabile, dal menù principale in modalità Run-Matrix, come mostrato in figura. A questo punto possiamo graficare la funzione

$$f(x) = (\alpha - 1 - x)(1 + x)^{7/5} - \alpha,$$

come fatto in figura, per avere una più chiara idea di quanti zeri possa avere e dove si trovano. La funzione sembra avere due zeri, di cui uno compreso fra 0 e 1, mentre l'altro vale circa 5.5, che si può escludere per le motivazioni dette in precedenza. Si può quindi chiedere alla calcolatrice di trovare lo zero della funzione usando il tasto "G-Solve", dopo aver zoomato sulla zona con un solo zero, per assicurarsi di trovare quello desiderato, come in figura.

Risposta: $\boxed{1.3379\,\mathrm{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}7$ Giramondo

Dalla legge dei gas perfetti, $pV = Nk_BT$, possiamo ricavare il numero di molecole N in funzione di pressione p, volume V e temperatura T. Poiché il volume delle due bottiglie è uguale, troviamo

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1},$$

dove il pedice 1 si riferisce ai valori di Giza e il pedice 2 a quelli di Machu Picchu.

Risposta: $\boxed{1.2114.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}8$ Tre autisti

Siano V_F, V_G e V_D le velocità di Fabio, Gimmy e Daniele. Daniele mantiene una distanza costante da Fabio e da Gimmy, quindi deve sempre trovarsi sull'asse del segmento Fabio–Gimmy. Se Fabio e Gimmy si muovono nello stesso verso, questo asse si sposta con velocità $(V_F + V_G)/2 = 84.5\,\mathrm{km/h} > V_D$, il che non è possibile. Quindi Fabio e Gimmy devono muoversi in verso opposto, nel qual caso la velocità dell'asse è $V_a = (V_G - V_F)/2 = 15.5\,\mathrm{km/h}$. La componente della velocità di Daniele lungo l'asse sarà invece $V_b = \sqrt{V_D^2 - V_a^2}$. Nel sistema di riferimento di Fabio, la velocità di Daniele vale

$$\sqrt{(V_F + V_a)^2 + V_b^2} = \sqrt{V_G V_F + V_D^2}.$$

Risposta: $\boxed{1.1672 \times 10^2\,\mathrm{km/h}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}9$ Branching ratio

Il tempo di dimezzamento è inversamente proporzionale alla probabilità per unità di tempo che un atomo decada. Quando entrambi i decadimenti possono avvenire, la probabilità di decadimento per unità di tempo r è data dalla somma delle probabilità di decadimento r_1 e r_2 in ciascuno dei due stati. Abbiamo dunque

$$r = r_1 + r_2 \implies \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \implies T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2},$$

dove T è il tempo richiesto e T_1 e T_2 sono i tempi di dimezzamento forniti nel testo.

Risposta: $\boxed{2.1000 \times 10^1\,\text{giorni.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}10$ Semisfere cariche

Il campo magnetico non compie lavoro, perciò esso modifica solo la direzione e non il modulo della velocità del protone. Dunque l'energia del protone si conserva durante il moto. Inizialmente essa vale $E_1 = \frac{1}{2}m_p v_1^2$, mentre alla fine vale $E_2 = \frac{1}{2}m_p v_2^2 + U$, dove U è l'energia potenziale elettrostatica del protone quando colpisce il rilevatore. Per calcolare U, operiamo una riflessione rispetto al piano yz. Poiché il rilevatore si trova sul piano di riflessione, il valore di U non cambia dopo la riflessione, mentre le due sfere vengono scambiate di posto. Prendendo la sovrapposizione lineare della configurazione descritta nel problema e di quella riflessa, otteniamo una sfera di carica totale uniforme $2(Q_1 + Q_2)$, dove Q_2 è la carica richiesta. Anche il l'energia potenziale si ottiene dalla somma dei due casi, perciò

$$2U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(Q_1 + Q_2)e}{L},$$

da cui

$$\frac{1}{2}m_p v_1^2 = \frac{1}{2}m_p v_2^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Q_1 + Q_2)e}{L} \implies Q_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 m_p L(v_1^2 - v_2^2)}{e} - Q_1.$$

Risposta: $\boxed{5.4950 \times 10^{-10}\,\mathrm{C}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$11 Il cannocchiale di Barbossa

Indichiamo con p_1, q_1 e f_1 la distanza dell'oggetto, la distanza dell'immagine e la lunghezza focale (con le convenzioni usuali sui segni) relative alla lente più lontana dall'occhio, e usiamo il pedice 2 per indicare le stesse quantità relative all'altra lente. Chiaramente, deve valere $d = q_1 + p_2$ dove $d = 7\,\text{cm}$ è la distanza tra le lenti. L'ingrandimento complessivo vale $G = G_1 G_2$, dove $G_i = -q_i/p_i$ è l'ingrandimento della lente i. La formula delle lenti sottili dà

$$\frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} = \frac{1}{f_i} \implies q_i = \frac{f_i p_i}{p_i - f_i},$$

per cui troviamo

$$G = G_1 G_2 = \left(-\frac{f_1}{p_1 - f_1}\right)\left(-\frac{f_2}{p_2 - f_2}\right) = \left(-\frac{f_1}{p_1 - f_1}\right)\left(-\frac{f_2}{d - q_1 - f_2}\right) = \frac{f_1 f_2}{p_1(d - f_1 - f_2) - f_1(d - f_2)}.$$

Questo non dipende da p_1 quando $d = f_1 + f_2$, nel qual caso $|G| = f_2/f_1 = f_2/(d - f_2)$.

Risposta: $\boxed{7.7500.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$12 Pile scariche

Sia $V_0 = 1.5\,\text{V}$. Per la legge di Ohm, la corrente che scorre nel circuito vale

$$I = \frac{V_0}{R + r} \implies \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{R + r_0 + \alpha q}.$$

Questa è una equazione differenziale a variabili separabili per $q(t)$, che può essere risolta come segue:

$$V_0\,\mathrm{d}t = (R + r_0 + \alpha q)\,\mathrm{d}q \implies V_0 t = (R + r_0)q + \alpha q^2/2.$$

Imponendo che la differenza di potenziale ai capi del dispositivo eguagli $V_1 = 1.2\,\text{V}$, troviamo il valore finale di q:

$$\frac{RV_0}{R + r_0 + \alpha q} = V_1 \implies q = \frac{1}{\alpha}\left(R\frac{V_0}{V_1} - R - r_0\right).$$

Sostituendo nella soluzione dell'equazione differenziale, troviamo

$$t = \frac{R + r_0}{\alpha V_0}\left(R\frac{V_0}{V_1} - R - r_0\right) + \frac{1}{2\alpha V_0}\left(R\frac{V_0}{V_1} - R - r_0\right)^2 = \frac{1}{2\alpha V_0}\left(\left(R\frac{V_0}{V_1}\right)^2 - (R + r_0)^2\right).$$

Notiamo che, poiché $r_0 \ll R$, il valore numerico di r_0 è trascurabile ai fini della richiesta.

Risposta: $\boxed{1.8750 \times 10^6\,\text{s.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$13 Pista inclinata

Le forze agenti sulla vettura che percorre la curva sono il peso $m\vec{g}$, la forza normale fra l'asfalto e l'auto $\vec{N}$ e la forza di attrito $\vec{F}_A$. Affinché l'auto possa percorrere la pista circolare di raggio R a una velocità v, è necessario che la risultante delle forze sia centripeta e di modulo v^2/R. Scomponendo le forze lungo l'asse verticale e orizzontale, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} N\cos\theta - F_A \sin\theta = mg \\ N\sin\theta + F_A\cos\theta = mv^2/R \end{cases}$$

che può essere risolto per trovare N e F_A:

$$\begin{cases} N = \dfrac{mv^2}{2R}\sin\theta + \dfrac{mg}{2}\cos\theta \\ F_A = \dfrac{mv^2}{2R}\cos\theta - \dfrac{mg}{2}\sin\theta \end{cases}$$

Questa soluzione è soggetta all'ulteriore vincolo $F_A \leq \mu N$, che se imposto permette di trovare la velocità limite a cui può essere percorsa la curva,

$$v(\theta) = \sqrt{gR\frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}.$$

Il valore richiesto si ottiene calcolando

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \sqrt{\frac{\cos\theta + \frac{1}{\mu}\sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}.$$

Risposta: $\boxed{1.2061.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$14 Pendolo in accelerazione

Nel sistema non inerziale solidale al supporto del pendolo, la massa m del pendolo è soggetta a una forza apparente orizzontale di modulo ma, dove $a = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$. Poiché la forza di gravità mg è verticale, la somma vettoriale delle due ha modulo $m\sqrt{g^2+a^2}$. Questo sistema è quindi equivalente a un pendolo soggetto a un'accelerazione di gravità di modulo $g_{\text{eff}} = \sqrt{g^2+a^2}$, da cui il periodo delle piccole oscillazioni vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{\text{eff}}}},$$

dove $L = 1.0\,\mathrm{m}$ è la lunghezza del pendolo.

Risposta: $\boxed{1.9861\,\mathrm{s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$15 Dilatazione dei tempi gravitazionale

Per analogia con il caso di una sfera uniformemente carica, tramite la legge di Gauss è possibile mostrare che il campo gravitazionale all'interno di una sfera di densità uniforme è proporzionale alla distanza dal centro. Sulla superficie della Terra esso vale $g(R_\oplus) = GM_\oplus/R_\oplus^2$, perciò all'interno deve valere

$$g(r) = g(R_\oplus)\frac{r}{R_\oplus} = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^3}r.$$

Questa accelerazione è pari a quella prodotta da una molla di costante elastica $k = GM_\oplus m/R_\oplus^3$ su un oggetto di massa m. L'energia potenziale gravitazionale per unità di massa deve essere quindi pari a quella elastica, che vale

$$\Delta V = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2}kR_\oplus^2 = \frac{GM_\oplus}{2R_\oplus}.$$

La differenza di età tra nucleo e superficie vale dunque

$$\Delta T = T - \frac{T}{1+\Delta V/c^2} = T\,\frac{\Delta V/c^2}{1+\Delta V/c^2} \approx T\,\frac{GM_\oplus}{2R_\oplus c^2}$$

dove $T = 4.543 \times 10^9$ anni e l'ultima formula è una approssimazione possibile grazie al fatto che $\Delta V/c^2 \ll 1$.

Risposta: $\boxed{1.5806\,\text{anni.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

Il progetto è sponsorizzato da