# Qualifica 2023 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

22 marzo 2023

Il progetto è sponsorizzato da

*Materiale elaborato dalla collaborazione fra*

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo `https://gas.olifis.it/#/about-us/`

## $\mathcal{P}$1 BARtico

Per calcolare il numero di cubetti di ghiaccio è sufficiente fare il rapporto fra il volume dell'Antartide, che approssimeremo come quello di un cilindro, e il volume di un cubetto. Quest'ultimo non è un dato fornito dal testo, ed è necessario stimarlo. Se $L$ è il lato del cubetto di ghiaccio, la risposta sarà

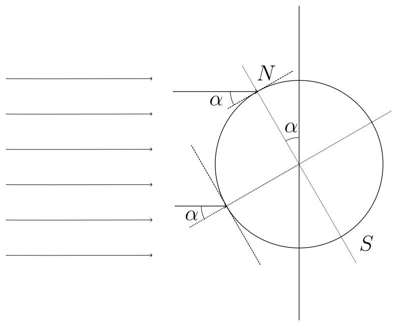
$$\log_{10} N = \log_{10} \frac{\pi d^2 h}{4L^3},$$

dove $d$ e $h$ sono il diametro e lo spessore della calotta. Per la stima della dimensione di un cubetto di ghiaccio, basta ricorrere all'immaginazione. La dimensione è approssimativamente quella di una falange di un pollice, quindi circa $2\,\mathrm{cm} \sim 3\,\mathrm{cm}$. La dimensione standard di un cubetto di ghiaccio indicata dall'IBA (International Bartender Association) è di $3\,\mathrm{cm}$. Essendo la precisione richiesta molto lassa, l'intervallo di valori consentiti per $L$ è largo circa un ordine di grandezza, e corrisponde grossomodo a $7.5\,\mathrm{mm} < L < 7.5\,\mathrm{cm}$. Per lo stesso motivo, non è necessario conoscere la geometria esatta della calotta antartica: una rozza stima del suo volume è più che sufficiente a risolvere il problema.

*Risposta:* $\boxed{21.27506.}$ *Errore massimo consentito:* 7.0%.

## $\mathcal{P}$2 Asse terrestre

È utile fare un disegno per comprendere la geometria del problema. A mezzogiorno del solstizio d'estate, i due pannelli solari si trovano sullo stesso piano definito dal sole e dall'asse terrestre. Con riferimento alla figura, la normale alla superficie terrestre forma con i raggi solari (provenienti da sinistra) un angolo $\alpha$ all'equatore e $\pi/2 - \alpha$ al polo nord. La potenza ricevuta da un pannello solare sarà proporzionale alla proiezione della sua area su un piano ortogonale ai raggi solari, ossia all'area della sua ombra. Quest'ultima è proporzionale al coseno dell'angolo formato con la normale alla superficie terrestre, perciò la risposta è $\frac{\cos\alpha}{\cos(\pi/2-\alpha)} = \frac{1}{\tan\alpha}$.




*Risposta:* $\boxed{2.30534.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}$3 Fuga dal prisma

L'angolo di incidenza limite oltre il quale si ha riflessione totale vale $\theta_L = \arcsin(1/n)$. Se il raggio incide sulla prima faccia con un angolo $\theta$, allora esso viene rifratto alla prima interfaccia e l'angolo di rifrazione vale soddisfa $\sin\theta_r = \frac{\sin\theta}{n}$. L'eventuale angolo di incidenza sulla seconda faccia è $\pi/2 - \theta_r$. La condizione richiesta è che quest'ultimo angolo sia maggiore di $\theta_L$ per qualsiasi valore di $\theta$, ovvero:

$$\frac{\pi}{2} - \theta_r \geq \theta_L \implies \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_r) \geq \sin\theta_L \implies \cos\theta_r = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\theta}{n}\right)^2} \geq \frac{1}{n} \implies n^2 \geq \sin^2\theta + 1.$$

Il valore massimo di $\sin^2\theta$ vale 1 (raggiunto nel caso di incidenza radente), perciò troviamo $n \geq \sqrt{2}$.

*Risposta:* $\boxed{1.41421.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}4$ Sorgente monodirezionale

Per semplicità, possiamo lavorare in una dimensione spaziale. Infatti, se le antenne non fossero allineate con la congiungente le due basi, potremmo ridurre la distanza tra esse spostando ciascuna sul più vicino punto della congiungente, senza modificare il cammino relativo delle onde. Ogni emettitore genera alla sua destra e alla sua sinistra 2 onde con la stessa lunghezza d'onda, ma speculari rispetto all'emettitore stesso. Fissando opportunamente il riferimento temporale e l'origine nell'emettitore di sinistra, esso emette un'onda la cui ampiezza, se misurata in un punto $x$ al tempo $t$, vale

$$A_0(x,t) = \frac{1}{|x|}\sin\left(2\pi\frac{|x|}{\lambda} - \omega t\right),$$

dove il fattore $1/x$ è dovuto al decadimento in intensità di un'onda sferica, il valore assoluto tiene conto della simmetria della sorgente e abbiamo fissato in modo arbitrario la costante moltiplicativa globale. Allo stesso modo, l'altro emittore genera un'onda di ampiezza

$$A_1(x,t) = \frac{1}{|x-d|}\sin\left(2\pi\frac{|x-d|}{\lambda} - \omega t + \phi\right).$$

Per ottenere una sorgente monodirezionale, vogliamo creare interferenza distruttiva a $x \to +\infty$ e costruttiva a $x \to -\infty$. La prima condizione richiede

$$0 = A_0(x \to +\infty, t) + A_1(x \to +\infty, t) \approx \frac{1}{x}\left(\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - \omega t\right) + \sin\left(2\pi\frac{x-d}{\lambda} - \omega t + \phi\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{x}\sin\left(2\pi\frac{2x-d}{2\lambda} - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{d}{2\lambda} - \frac{\phi}{2}\right),$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato le formule di prostaferesi. Si noti che il seno non si può annullare in ogni punto, mentre, con un'opportuna scelta di parametri, il coseno sì. Dall'altro lato, si ha

$$A_0(x \to -\infty, t) + A_1(x \to -\infty, t) = -\frac{1}{x}\left(\sin\left(2\pi\frac{-x}{\lambda} - \omega t\right) + \sin\left(2\pi\frac{-x+d}{\lambda} - \omega t + \phi\right)\right) =$$

$$= -\frac{2}{x}\sin\left(2\pi\frac{-2x+d}{2\lambda} - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)\cos\left(-2\pi\frac{d}{2\lambda} - \frac{\phi}{2}\right).$$

L'onda a $x \to +\infty$ si annulla per $d = \lambda\frac{(\pi+\phi)}{2\pi} + k_1\lambda$, mentre il quella a $x \to -\infty$ ha ampiezza massima se $d = -\lambda\frac{\phi}{2\pi} + k_2\lambda$, dove $k_1$ e $k_2$ sono due generici numeri interi. Uguagliando le due espressioni per $d$ si ottiene $\phi = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$, con $k$ intero arbitrario. Sostituendo questo risultato in una delle due precedenti equazioni, si trova che il minimo valore positivo di $d$ è $\frac{\lambda}{4}$.

*Risposta:* $\boxed{0.25000\,\text{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}5$ Astronauta giocoliere

Per avere un'accelerazione pari a $g$ serve che la navicella ruoti con velocità angolare $\omega = \sqrt{g/R}$. Nel sistema di riferimento inerziale in cui il centro della navicella è fermo, la pallina viene lanciata, rispetto alla tangente alla navicella, con un angolo $\alpha$ tale che $\tan\alpha = \frac{v}{\omega R}$. In questo sistema, essa non subisce forze dopo il lancio, dunque si muove di moto rettilineo uniforme. Calcolando geometricamente la nuova intersezione della sua traiettoria con la navicella, si deduce che lo spazio percorso in volo è pari a $\ell = 2R\sin\alpha$. Il tempo trascorso in volo è dunque $t = \frac{\ell}{\sqrt{v^2+\omega^2R^2}}$. In quello stesso tempo, l'osservatore compie una rotazione di un angolo pari a $\omega t$, mentre la pallina si sposta di un angolo $2\alpha$ al centro. Lo spazio minimo da percorrere è dunque $|2\alpha - \omega t|R$.

*Risposta:* $\boxed{1.35634\,\mathrm{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}6$ Molecole nell'atmosfera

La legge di Stevino ci dice che la differenza di pressione sotto e sopra uno strato di atmosfera è pari al peso dell'aria contenuta in esso, diviso per l'area dello strato. Approssimando l'accelerazione di gravità come costante per tutta l'atmosfera, deduciamo che la pressione atmosferica al livello del mare è pari al peso dell'atmosfera diviso per l'area della superficie terrestre:

$$p_0 = \frac{30 N m_p g}{4\pi R_\oplus^2}.$$

L'approssimazione di accelerazione di gravità costante è buona, in quanto essa è proporzionale al quadrato della distanza dal centro della Terra e la variazione della distanza è meno di $1/60$ (supponendo che lo spessore dell'atmosfera sia circa 100 km). Ricaviamo infine

$$N = \frac{4\pi p_0 R_\oplus^2}{30 m_p g}.$$

*Risposta:* $\boxed{44.02185.}$ *Errore massimo consentito:* 1.0%.

## $\mathcal{P}7$ Circuito simmetrico

Per prima cosa, notiamo che il punto opposto ad A è direttamente collegato ad esso, dunque ha la stessa tensione. Lo stesso vale per il punto opposto a B. Per simmetria, si nota inoltre che la circonferenza è divisa in 4 parti equivalenti, dunque gli archi esterni collegano nodi che, anche in loro assenza, sarebbero allo stesso potenziale. Ne consegue che il circuito, se opportunamente ridisegnato, è equivalente a 4 blocchi in parallelo, ciascuno costituito da 2 resistenze $R$ poste in serie. Applicando le regole di somma delle resistenze in serie e parallelo si ottiene che la resistenza equivalente vale $R_{AB} = \frac{R}{2}$

*Risposta:* $\boxed{110.00000\,\Omega.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}8$ Hula hoop

Sia $r$ il raggio del cilindro e $L$ la circonferenza del bracciale. Poiché il nastro non può strisciare, per ogni rotazione il punto di contatto con il nastro si sposta di $2\pi r$ lungo il bracciale. Il numero di giri $N$ si trova dividendo la lunghezza del nastro per questa distanza, cioè

$$N = \frac{L}{2\pi r}.$$

*Risposta:* $\boxed{9.54930.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}9$ Pianeta ristretto

Per prima cosa, calcoliamo la velocità del satellite nell'orbita circolare imponendo che la forza gravitazionale sia pari a quella centripeta, ottenendo $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. L'energia della nuova orbita è pari a

$$E = \frac{m}{2}v^2 - G\frac{(1-f)Mm}{R} = -\frac{GMm}{R}\left(\frac{1}{2} - f\right),$$

dove $f = 30\%$ è la frazione di massa persa dal pianeta.
Sapendo che l'energia di un'orbita gravitazionale chiusa attorno a un corpo di massa $(1-f)M$ è legata al semiasse maggiore $a$ da

$$E = -\frac{G(1-f)Mm}{2a},$$

si ottiene che il nuovo semiasse maggiore è $a = \frac{1-f}{1-2f}R$. Infine, a distanza dell'afelio vale $2a - R$.

*Risposta:* $\boxed{10.00000 \times 10^8\ \mathrm{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}10$ Collasso di un atomo

Per il teorema del viriale, per ogni rivoluzione vale l'uguaglianza

$$\langle K\rangle = -\langle U\rangle/2,$$

dove $K$ è l'energia cinetica ed $U$ è l'energia potenziale. Essendo l'orbita circolare, è possibile sostituire al valore medio la grandezza stessa, poiché essa è costante. L'utilizzo del teorema del viriale non è fondamentale, in alternativa si può imporre che la forza risultante sull'elettrone sia centripeta, ottenendo lo stesso risultato. In un generico istante di tempo $t$, l'energia totale dell'elettrone vale

$$E = K + U = -\frac{U}{2} + U = \frac{U}{2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r(t)},$$

dove $r(t)$ è il raggio istantaneo della sua orbita circolare attorno al protone.
La potenza dissipata vale

$$P = -\frac{e^2 a^2(t)}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

dove l'accelerazione dell'elettrone non è altro che l'accelerazione centripeta

$$a(t) = \frac{v^2(t)}{r(t)} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^4(t)}.$$

Per trovare l'evoluzione dell'orbita, imponiamo

$$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \implies \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{4}{3c^3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}\right)^2\frac{1}{r^2}.$$

Integrando l'equazione differenziale con la tecnica della separazione delle variabili, troviamo il tempo $\tau$ che impiega l'elettrone a cadere sul nucleo:

$$\int_{a_0}^{0} r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{4c}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}\right)^2\int_0^\tau \mathrm{d}t \implies \tau = \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}{e^2}\right)^2\frac{a_0^3}{4c}.$$

*Risposta:* $\boxed{15.56192 \times 10^{-12}\ \mathrm{s.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}$11 Superman e la cannuccia

La pressione nell'estremità bassa della cannuccia è necessariamente la pressione atmosferica $p_0$, mentre la pressione in cima sarà come minimo (se Superman riesce a rimuovere tutta l'aria) nulla. Applicando la legge di Stevino, l'altezza massima che si può avere nella cannuccia è quella che genera alla base una pressione pari a quella atmosferica, ovvero

$$h_{\text{max}} = \frac{p_0}{\rho g}.$$

Un'altezza maggiore farebbe uscire l'acqua dall'estremità inferiore della cannuccia, abbassando il livello della colonna fino ad $h_{\text{max}}$.

*Risposta:* $\boxed{10.33227\,\text{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}$12 Rimbalzo su una pallina

Poiché l'accelerazione di gravità è uguale per le due palle, esse non possono urtarsi durante la fase di discesa. Perciò, quando esse si scontrano, devono star viaggiando in versi opposti, in particolare la palla di massa $M$ deve starsi muovendo verso l'alto. Se l'impatto avviene ad altezza $h'$, allora, per via della conservazione dell'energia, entrambe le palline hanno in quel momento velocità $v_0 = \sqrt{2g(h-h')}$. Imponendo la conservazione dell'energia e della quantità di moto durante l'urto, si ricava che la pallina più piccola rimbalza con una velocità pari a $v' = v_0 \frac{3-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}$. L'altezza massima raggiunta dalla palla più piccola è quindi

$$H = h' + \frac{v'^2}{2g} = h' + \frac{(h-h')\left(3-\frac{m}{M}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}.$$

Poiché $h'$ è una funzione di $t$, massimizzare questa funzione rispetto ad $h'$ è equivalente a massimizzarla rispetto a $t$. Poiché la dipendenza da $h'$ è lineare, basta calcolare il coefficiente angolare della retta $H(h')$ al fine di trovare il massimo. Con il valore di $\frac{m}{M}$ fornito nel testo, il massimo si ha per $h' = 0$ (e quindi $t = 0$, cioè la seconda pallina deve essere rilasciata immediatamente dopo la prima), da cui

$$\frac{H_{\text{max}}}{h} = \left(\frac{3-\frac{m}{M}}{1+\frac{m}{M}}\right)^2.$$

*Risposta:* $\boxed{6.95041.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}$13 Il piccolo principe

Camminando sulla superficie, il piccolo principe non potrà superare in alcun modo la velocità $v$ dell'orbita circolare con raggio pari a quello dell'asteroide. Eguagliando la forza centripeta a quella gravitazionale, si trova $v = \sqrt{GM/R}$. Poiché inizialmente egli è fermo e l'asteroide non ruota, la velocità angolare massima dell'asteroide si otterrà camminando sempre nella stessa direzione fino a raggiungere la velocità massima $v$, al fine di massimizzare il momento angolare dell'asteroide. Il momento angolare del piccolo principe rispetto al centro dell'asteroide è $L = mvR$; per la conservazione del momento angolare, anche quello dell'asteroide ha modulo $L$ (ma verso opposto). Se ne ricava che la velocità angolare finale dell'asteroide vale

$$\omega = \frac{L}{\frac{2}{5}MR^2},$$

dove il denominatore è pari al momento d'inerzia dell'asteroide (che, per ipotesi, è una sfera di densità uniforme) rispetto ad un asse passante per il suo centro.

*Risposta:* $\boxed{1.92178 \times 10^{-15}\,\mathrm{rad/s.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

## $\mathcal{P}$14 Coefficiente adiabatico

Ricordiamo innanzitutto che in una trasformazione adiabatica, pressione e volume di un gas perfetto rispettano la relazione

$$pV^\gamma = \text{costante} := K.$$

Sebbene il problema non specifichi che il gas sia perfetto, è possibile fare un grafico con i dati in tabella e verificare che essi rispettano approssimativamente questa relazione. Per fare un fit, è opportuno linearizzare questa formula. Per farlo, possiamo innanzitutto rimaneggiare l'equazione:

$$\frac{p}{p_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^\gamma = \frac{K}{p_0 V_0^\gamma},$$

dove abbiamo introdotto delle costanti arbitrarie $p_0, V_0$. Queste costanti sono state introdotte per pura comodità e non hanno nessun significato fisico particolare. Possiamo ora prendere il logaritmo membro a membro di questa equazione, trovando

$$\ln\frac{p}{p_0} + \gamma \ln\frac{V}{V_0} = \ln\frac{K}{p_0 V_0^\gamma}.$$

Se definiamo le variabili

$$X = \ln\frac{V}{V_0}, \quad Y = \ln\frac{p}{p_0},$$

la nostra relazione prende la forma

$$Y = -\gamma X + \ln\frac{K}{p_0 V_0^\gamma},$$

che è esattamente l'equazione di una retta con coefficiente angolare $-\gamma$. Notiamo che quello che abbiamo detto vale per qualsiasi scelta di $p_0, V_0$ e per questo motivo possiamo scegliere dei valori particolarmente comodi per semplificarci i calcoli. Possiamo per esempio prendere $p_0 = 1\,\mathrm{psi}, V_0 = 1\,\mathrm{gal}$, in modo da non doverci nemmeno preoccupare di convertire i dati forniti dal sistema imperiale al SI. Tabulando quindi i valori di $X$ e $Y$, possiamo infine eseguire un fit dei minimi quadrati con la calcolatrice, trovando il coefficiente angolare della retta di miglior fit, che in questo caso sarà proprio l'opposto del coefficiente $\gamma$ richiesto.

*Risposta:* $\boxed{1.53640.}$ *Errore massimo consentito:* 1.0%.

Il progetto è sponsorizzato da

BRILLIANT CASIO AIF