Finale nazionale 2025 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

11 aprile 2025

Il progetto è sponsorizzato da

Materiale elaborato dalla collaborazione fra

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo `https://gas.olifis.it/about-us/`

$\mathcal{P}1$ Chitarra scordata

Fabio sta udendo i battimenti, cioè modulazioni dell'intensità del suono con frequenza $f_b = |f_c - f_d|$, dove f_c e $f_d = 440\,\mathrm{Hz}$ sono le frequenze dei suoni emessi dalla corda e dal diapason. La frequenza originaria della corda è dunque $f_{c1} = f_d \pm f_{b1}$, dove $f_{b1} = (0.87\,\mathrm{s})^{-1}$ e il $\pm$ indica le due possibili soluzioni. La frequenza della corda dopo la variazione di tensione è $f_{c2} = f_d \pm f_{b2}$, dove $f_{b2} = (1.75\,\mathrm{s})^{-1}$. Poiché la tensione viene aumentata, deve valere $f_{c_2} > f_{c1}$. Visto che $f_{b2} < f_{b1}$, l'unica soluzione per f_{c1} è $f_{c1} = f_d - f_{b1}$.

Risposta: $\boxed{4.3885 \times 10^2\,\mathrm{Hz}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.02%.

$\mathcal{P}2$ Velocità di fuga

Sia m la massa del satellite. La minima velocità necessaria ad allontanarsi indefinitamente, anche nota come "velocità di fuga", si può trovare richiedendo che l'energia meccanica del satellite sia positiva:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} > 0 \implies v > \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}}.$$

Sia $r(t)$ la distanza del satellite dal centro della Terra in funzione del tempo. Al tempo iniziale si ha $r(0) = R_\oplus$ e $\dot{r}(0) = \sqrt{2GM_\oplus/R_\oplus}$. Poiché la traiettoria del satellite è radiale, la sua velocità è data da $\dot{r}(t)$ in ogni istante. La conservazione dell'energia meccanica dà allora

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GM_\oplus m}{r} = \frac{1}{2}m\frac{2GM_\oplus}{R} - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} = 0,$$

Poiché il satellite si sta allontanando (e dunque $\dot{r} > 0$), abbiamo

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{r}} \implies \sqrt{r}\,\mathrm{d}r = \sqrt{2GM_\oplus}\,\mathrm{d}t.$$

Integrando tra $R_\oplus$ e $2R_\oplus$, troviamo il tempo richiesto:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2GM_\oplus}}\int_{R_\oplus}^{2R_\oplus} \sqrt{r}\,\mathrm{d}r = \frac{4-\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{R_\oplus^3}{GM_\oplus}}.$$

Risposta: $\boxed{6.9493 \times 10^2\,\mathrm{s}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}3$ J sigillata

Notiamo che la pressione p nella bolla d'aria è uguale nelle due configurazioni. Infatti, la pressione di un gas dipende solo dalla temperatura, dal numero di moli e dal volume: la temperatura è costante per ipotesi; il numero di moli non cambia perché il contenitore è sigillato; il volume della bolla è sempre pari alla differenza tra quello del contenitore e quello occupato dall'acqua (incomprimibile per ipotesi). Detta allora x la distanza verticale tra il punto A e il piano π che separa ciascun braccio verticale da quello orizzontale, dalla Legge di Stevino si ha che la pressione in A vale, nella prima configuazione,

$$p_1 = p + \rho_\mathrm{a} x g,$$

mentre, nella seconda, vale

$$p_2 = p + \rho_\mathrm{a}(H - h + x)g,$$

essendo $H - h$ la distanza tra l'interfaccia aria-acqua e il piano π. Segue allora che la variazione di pressione è

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho_a(H - h)g.$$

Risposta: $\boxed{1.9613 \times 10^3\,\text{Pa.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}4$ Boa di tungsteno

Siano $\rho = 19250\,\text{kg/m}^3$ la densità e $s = 2\,\text{mm}$ lo spessore del guscio. La massa del guscio sferico vale allora

$$m = \frac{4\pi\rho}{3}\left(r^3 - (r-s)^3\right),$$

mentre, se il guscio è immerso per metà, il volume d'acqua da esso spostato vale

$$V = \frac{2\pi r^3}{3}.$$

Per il Principio di Archimede si ha $m = \rho_a V$, da cui

$$\frac{4\pi\rho}{3}\left(r^3 - (r-s)^3\right) = \frac{2\pi r^3 \rho_a}{3} \implies r^3\left(1 - \frac{\rho_a}{2\rho}\right) = (r-s)^3 \implies r = \frac{s}{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\rho_a}{2\rho}}}.$$

Si noti che approssimando la massa del guscio con $m \approx 4\pi r^2 s\rho$ (valida per $s \ll r$) si ottiene un'equazione lineare con soluzione $r = 6s\rho/\rho_a$. Il valore numerico trovato in questo modo soddisfa $s \ll r$ e rientra nell'errore massimo consentito.

Risposta: $\boxed{2.2899 \times 10^{-1}\,\text{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 2.0%.

$\mathcal{P}5$ Specchio relativistico

Nel sistema di riferimento dello specchio, la lunghezza d'onda del raggio incidente pari a $\lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ (dove $\lambda = 460\,\text{nm}$ e $\beta = 0.2$), a causa dell'effetto Doppler relativistico. Nel sistema dello specchio, la lunghezza d'onda del raggio riflesso è uguale a quella del raggio incidente. Invece, nel sistema di riferimento di Marco, tale lunghezza d'onda è nuovamente aumentata per l'effetto Doppler relativistico e vale

$$\lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \lambda\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Risposta: $\boxed{6.9000 \times 10^2\,\text{nm.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}6$ Traiettorie sul cono

Sull'oggetto agiscono due forze: la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare $\vec{N}$. Le due forze sono conservative, per cui nel moto si conserva l'energia meccanica. Usando un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z), dove il cono è definito dalla relazione $r = z\tan\alpha$ e il suo vertice si trova in $r = z = 0$, l'energia dell'oggetto vale

$$E = \frac{1}{2}m(v_z^2 + v_\theta^2 + v_r^2) + mgz = \frac{1}{2}m(v_z^2(1 + \tan^2\alpha) + v_\theta^2) + mgz,$$

dove abbiamo usato la relazione $r = z\tan\alpha$, da cui $v_r = v_z\tan\alpha$.
Visto che sia la forza peso sia la reazione normale esercitano un momento torcente nullo rispetto all'asse del cono, la componente verticale del momento angolare (per unità di massa) $L_z = rv_\theta$ è conservata. Possiamo quindi riscrivere l'energia come

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_z^2}{\cos^2\alpha} + \frac{L_z^2}{z^2\tan^2\alpha}\right) + mgz.$$

I valori di massima e minima quota si trovano nei punti in cui $v_z = 0$. Uno di questi è proprio l'istante iniziale, mentre il secondo è determinato dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}m\frac{L_z^2}{z^2\tan^2\alpha} + mgz.$$

Anche il valore di L_z si può determinare dai dati iniziali: $L_z = v_0 h\tan\alpha$. La formula può essere riscritta come una equazione polinomiale di terzo grado,

$$x^3 - x^2\left(1 + \frac{v_0^2}{2gh}\right) + \frac{v_0^2}{2gh} = 0, \qquad x = \frac{z}{h}.$$

Questo polinomio ha una radice conosciuta, cioè $x = 1$, corrispondente all'istante iniziale. Per questo, esso si può fattorizzare come

$$(x-1)(x^2 - Ax - A) = 0, \qquad A = \frac{v_0^2}{2gh}.$$

L'equazione quadratica fornisce altre due soluzioni, di cui una sola corrispondente a una quota positiva:

$$z = \frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh}{v_0^2}}\right),$$

da cui troviamo la risposta al problema:

$$\left|\frac{v_0^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8gh}{v_0^2}}\right) - h\right|.$$

Alternativamente, anziché fattorizzare il polinomio, è possibile risolvere l'equazione di terzo grado numericamente, il che porta alla stessa conclusione.

Risposta: $\boxed{5.7360 \times 10^{-2}\,\mathrm{m.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}7$ Orologio a pendolo

Per analisi dimensionale, il periodo del pendolo fisico è $t \propto \sqrt{L/g}$, dove la lunghezza L è una combinazione lineare delle dimensioni delle componenti del pendolo. Poiché tutte le dimensioni si espandono dello stesso fattore, pari a $(1 + \lambda\Delta T)$, dove $\lambda = 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ e $\Delta T = 25\,°\mathrm{C}$, il pendolo impiegherà un tempo $t_0\sqrt{1+\lambda\Delta T}$ per indicare il passaggio di 1 giorno, dove $t_0 = 1$ giorno. Dopo 1 giorno, dunque, il tempo segnato dall'orologio è

$$\tilde{t}_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1+\lambda\Delta T}}$$

e la differenza con il tempo reale è

$$\tilde{t}_0 - t_0 = t_0\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda\Delta T}} - 1\right) \approx -t_0\frac{\lambda\Delta T}{2},$$

dove l'ultima approssimazione vale per $\lambda\Delta T \ll 1$.

Risposta: $\boxed{-1.0798 \times 10^1\,\text{s.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}8$ Stella lontana

La terza legge di Keplero, nell'usuale approssimazione in cui la stella è molto più massiva del pianeta, è

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{a^3},$$

dove M è la massa della stella e a è il semiasse maggiore (in questo caso corrispondente al raggio) dell'orbita. Il diametro angolare della stella α è tale che $a\sin(\alpha/2) = R$, dove R è il raggio della stella. La densità media della stella vale dunque

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3 \sin^3(\alpha/2)} = \frac{3\pi}{GT^2\sin^3(\alpha/2)} \approx \frac{24\pi}{GT^2\alpha^3},$$

dove nell'ultima equazione abbiamo usato $\sin x \approx x$ per $x \ll 1$.

Risposta: $\boxed{1.6281 \times 10^3\,\text{kg/m}^3.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}9$ Oscillazioni di molecole

Poiché le forze tra i componenti della molecola (nuclei ed elettroni) sono puramente elettromagnetiche, le posizioni di equilibrio dei nuclei e la distribuzione degli elettroni dipendono solo dalle cariche, e non dalle masse dei nuclei. Anche le forze agenti sui nuclei durante le vibrazioni radiali sono uguali per le due molecole considerate. Calcoliamo l'accelerazione relativa tra i due nuclei:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{d}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{a}_A - \vec{a}_B = \frac{\vec{F}_A}{m_A} - \frac{\vec{F}_B}{m_B} = \frac{m_B\vec{F}_A - m_A\vec{F}_B}{m_A m_B} = \frac{m_A + m_B}{m_A m_B}\vec{F}_A,$$

dove i pedici A e B si riferiscono ai due nuclei, $\vec{d}$ è la posizione di A rispetto a B, $\vec{a}$ sono le accelerazioni, m sono le masse, $\vec{F}$ sono le forze e abbiamo usato il terzo principio della dinamica, $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$. Dunque la distanza tra i nuclei evolve nel tempo come la posizione di una particella di massa

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B},$$

nota come "massa ridotta", soggetta alla forza $\vec{F}_A$.
Visto che siamo in presenza di piccole oscillazioni intorno a una posizione di equilibrio, i due nuclei saranno soggetti a una forza di richiamo lineare, $\vec{F}_A = -\vec{F}_B = -k(\vec{d} - \vec{d}_0)$, dove k è una costante di proporzionalità e $\vec{d}_0$ è la posizione di equilibrio. Il moto è quindi equivalente a quello di una massa μ attaccata a una molla di costante elastica k: la frequenza vale $\omega = \sqrt{k/\mu}$ e la risposta al problema è

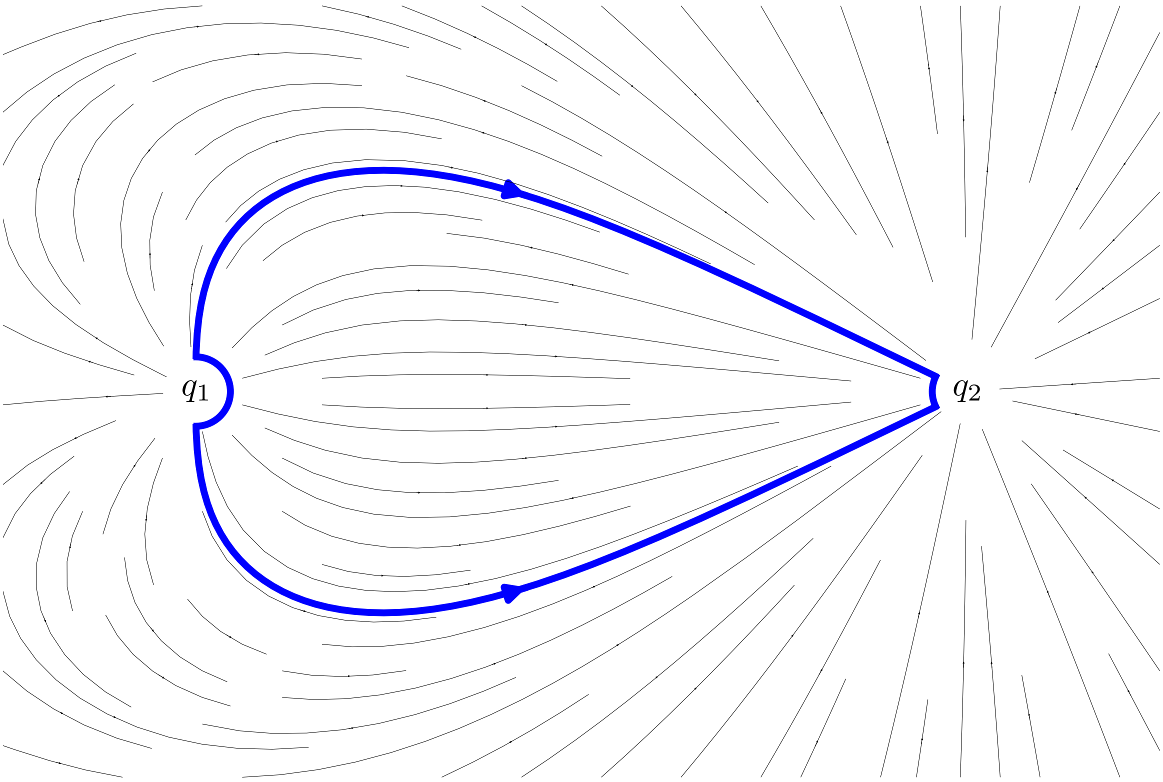
$$\begin{aligned}\omega_{\mathrm{D}} &= \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{H}}}{\mu_{\mathrm{D}}}}\omega_{\mathrm{H}} = \sqrt{\frac{m_p \cdot m_p}{m_p + m_p} \cdot \frac{m_p + m_d}{m_p \cdot m_d}}\,\omega_{\mathrm{H}} \approx \sqrt{\frac{m_p \cdot m_p}{m_p + m_p} \cdot \frac{m_p + (m_p + m_n)}{m_p \cdot (m_p + m_n)}}\,\omega_{\mathrm{H}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{m_n}{2(m_p + m_n)}}\,\omega_{\mathrm{H}},\end{aligned}$$

dove μ_{H} e μ_{D} sono le masse ridotte dei nuclei delle molecole H_2 e HD rispettivamente, m_d è la massa del nucleo di deuterio e $\omega_{\mathrm{H}} = 1.32 \times 10^{14}\,\text{Hz}$. In questa formula abbiamo approssimato $m_d \approx m_p + m_n$, il che fornisce una risposta accurata allo 0.02%. La differenza tra $m_d = 1875.61\,\text{MeV/c}^2$ e $m_p + m_n$

è data dalla energia di legame nucleare. Si noti che, poiché $m_p \approx m_n$, è possibile semplificare il calcolo notando che $\mu_\mathrm{H} \approx m_p/2$ e $\mu_\mathrm{D} \approx 2m_p/3$, per cui $\omega_\mathrm{D} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_\mathrm{H}$: questa risposta è accurata allo 0.01%.

Risposta: $\boxed{1.1432 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$10 Linee di campo



Consideriamo un "tubo di flusso", non contenente cariche, la cui superficie laterale è delimitata da linee di flusso, come in figura. Poiché il flusso del campo elettrico attraverso la superficie laterale è nullo, il flusso attraverso una base deve essere opposto a quello attraverso l'altra base. Poiché il campo elettrico in prossimità di una carica q ha simmetria sferica, se scegliamo le superfici di base del tubo molto vicine alle cariche possiamo calcolare il flusso come una frazione di quello attraverso una superficie chiusa:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi},$$

dove Ω è l'angolo solido sotteso dalla superficie di base. Vogliamo dunque calcolare l'angolo solido definito dalle linee di flusso che emergono da una carica con un angolo $\theta \leq \theta_i$, ossia la corrispondente superficie di una sfera unitaria:

$$\Omega = \int_0^{\theta_i} 2\pi \sin\theta \,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{\cos\theta_i}^{1} \mathrm{d}\cos\theta = 2\pi(1-\cos\theta_i).$$

Questo risultato può essere trovato anche applicando la formula per l'area della una calotta sferica, oppure ricordandosi che la superficie di un segmento sferico è proporzionale alla sua altezza (e quindi a $1-\cos\theta_i$).
Eguagliando il flusso entrante in una base con quello uscente dall'altra, abbiamo perciò

$$q_1(1-\cos\theta_1) = -q_2(1-\cos\theta_2),$$

da cui

$$\theta_2 = \arccos\left(1 + \frac{q_1}{q_2}(1 - \cos\theta_1)\right).$$

Il valore cercato si trova inserendo i valori forniti nel testo, ossia $\theta_1 = \pi/2$ e $q_1/q_2 = -0.1$.

Risposta: $\boxed{4.5103 \times 10^{-1}\,\text{rad.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$11 E.T.1982

Possiamo determinare il numero di giorni in un anno contando quante volte un piano passante per l'asse del pianeta e solidale a esso interseca la stella. Se, nel corso di un anno ETiano, il pianeta compie N rotazioni su se stesso, questo piano compie N angoli giri. Al contempo, la stella compie rispetto al pianeta un angolo giro nel verso opposto, per cui essa interseca il piano $N + 1 = 198.2$ volte. In $N + 1$ giorni ETiani, il pianeta ha dunque compiuto N rotazioni su se stesso, per cui il periodo di rotazione è

$$\frac{(N+1)\,\text{giorni ETiani}}{N} = \frac{198.2}{197.2}\ \text{giorni ETiani.}$$

Risposta: $\boxed{1.0051\,\text{giorni ETiani.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.05%.

$\mathcal{P}$12 Batterie burlone

Siano $V_0 = 12\,\mathrm{V}$, e $P = 1\,\mathrm{W}$ la potenza consumata. Quest'ultima è data dal prodotto tra tensione e corrente,

$$P = V(Q)I = -V(Q)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Integrando tra l'istante iniziale e quello finale, troviamo

$$PT = -\int_{Q_0}^{0} V(Q)\,\mathrm{d}Q = \int_0^{Q_0} V(Q)\,\mathrm{d}Q,$$

dove $Q_0 = 120\,\mathrm{C}$ è la carica iniziale e T è il tempo impiegato dalla batteria a scaricarsi. Notando che $Q_0/C > V_0$, troviamo

$$T = \frac{1}{P}\int_0^{Q_0} V(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{P}\int_0^{CV_0}\frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q + \frac{1}{P}\int_{CV_0}^{Q_0} V_0\,\mathrm{d}Q = \frac{CV_0^2}{2P} + \frac{V_0(Q_0 - CV_0)}{P} = \frac{V_0(Q_0 + CV_0)}{2P}.$$

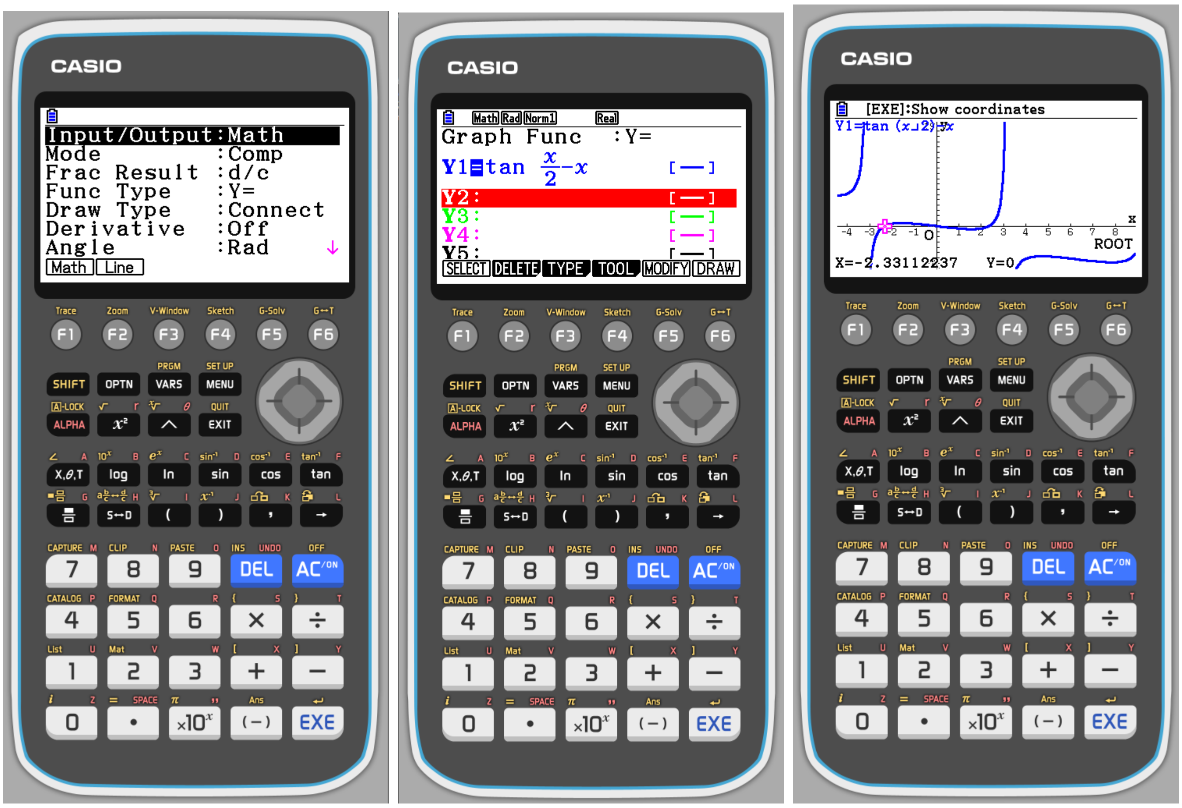
Risposta: $\boxed{1.0800 \times 10^{3}\,\text{s.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$13 Chiudere una porta

Quando l'angolo in figura vale θ, la lunghezza della molla è $l(\theta) = 2L\sin(\theta/2)$, perciò la sua energia potenziale vale

$$U(\theta) = \frac{k\,l(\theta)^2}{2} = kL^2(1 - \cos\theta).$$

Affinché la porta si chiuda non deve esserci un punto di inversione nel suo moto: in altre parole, la sua energia cinetica deve essere sempre positiva. Questa è pari alla differenza tra il lavoro applicato



da Luca e $U(\theta)$. Il massimo momento torcente che Luca può applicare è $\tau = 2LF$, per cui il massimo lavoro che egli può esercitare vale $2LF\theta$, da cui

$$2LF\theta \geq kL^2(1-\cos\theta) \implies F \geq \frac{kL}{2}\frac{1-\cos\theta}{\theta}.$$

Cerchiamo allora il massimo della funzione $f(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\theta}$ nell'intervallo dato. Osserviamo anzitutto che $f(0) = 0$ e $f(\pi) = 2/\pi$. Calcoliamone ora la derivata e poniamola uguale a zero:

$$f'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta} - \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = 0 \implies \theta = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Risolvendo numericamente quest'ultima equazione troviamo $\theta_0 \approx 2.33112\,\mathrm{rad}$ e $f(\theta_0) > 2/\pi$, per cui $f(\theta_0)$ è effettivamente il massimo cercato. La forza minima richiesta è quindi $F_{\min} = \frac{kL}{2}f(\theta_0)$.
Vediamo ora come si può risolvere numericamente l'equazione trascendente trovata sopra, con l'aiuto di una calcolatrice ammessa alla gara, per esempio la Casio fx-CG50. Dato che si tratta di una equazione trigonometrica, è importante iniziare controllando che la calcolatrice sia impostata in radianti. Per farlo possiamo entrare nel menù RUN-MATRIX e poi selezionare SET UP, che si può premere con la sequenza di tasti SHIFT+MENU. Come si vede in figura, l'ultima voce della pagina conferma che stiamo usando i radianti come unità di misura. Dopo questo controllo, possiamo tornare al menu GRAPH e graficare la funzione $f(x) = \tan\frac{x}{2} - x$, come in figura. Trovando gli zeri di questa funzione avremo la risposta. Per farlo, possiamo graficare la funzione, come in figura, e usare la funzionalità G-SOLVE per chiedere alla calcolatrice di trovare gli zeri della funzione, selezionando ROOT. Come si vede dalla figura, questa funzione ha molti zeri, mentre noi siamo interessati al primo strettamente positivo, che non è quello selezionato inizialmente dalla calcolatrice. Per trovare lo zero giusto possiamo notare che la funzione è dispari, e quindi lo zero cercato è esattamente l'opposto dello zero in figura, oppure usare le freccette per selezionare gli altri zeri, fino a trovare quello che ci interessa.

Risposta: $\boxed{2.8984 \times 10^2\,\mathrm{N}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$14 Parole al vento

Sia L la distanza tra Marta e una qualunque delle sue amiche, v la velocità del vento e v_s quella del suono. Nel sistema di riferimento del vento, tutte e tre le amiche si muovono nello stesso verso (quello che va da Barbara ad Alice) con velocità v. L'intensità del suono è proporzionale alla frequenza udita e al quadrato della distanza percorsa. Poiché la velocità relativa tra le amiche è nulla, anche l'effetto Doppler è nullo (la frequenza udita da Alice e Barbara è pari a quella emessa da Marta), e l'unico contributo alla differenza di intensità è dato dalla diversa distanza percorsa dal suono. Le due intensità I_A e I_B soddisfano dunque

$$\frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{v_s t_B}{v_s t_A}\right)^2,$$

dove t_A e t_B sono i tempi impiegati dal suono a raggiungere Alice e Barbara. Affinché un'onda sonora emessa da Marta raggiunga Alice in un tempo t_A, la distanza $v_s t_A$ percorsa dal suono deve uguagliare la somma delle distanze L e $v t_A$, essendo quest'ultima quella percorsa nel frattempo da Alice. Si trova dunque

$$v_s t_A = L + v t_A \implies t_A = \frac{L}{v_s - v}.$$

Analogamente, nel caso di Barbara, poiché ella si sta avvicinando al punto in cui è emesso il suono nel sistema di riferimento del vento, si ha

$$v_s t_B = L - v t_B \implies t_B = \frac{L}{v_s + v}.$$

Sostituendo t_A e t_B nell'equazione iniziale, troviamo dunque

$$\frac{I_A}{I_B} = \left(\frac{t_B}{t_A}\right)^2 = \left(\frac{v_s - v}{v_s + v}\right)^2.$$

Risposta: $\boxed{9.0660 \times 10^{-1}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$15 Frigorifero regolabile

Quando il frigorifero è a temperatura T, se la macchina estrae una potenza termica P_f da esso e cede una potenza termica P_a all'ambiente a temperatura T_a, per definizione di macchina di Carnot deve valere

$$\frac{P_\mathrm{f}}{T} = \frac{P_\mathrm{a}}{T_\mathrm{a}}.$$

Per il primo principio della termodinamica, si ha $P = P_\mathrm{a} - P_\mathrm{f}$, dove P è la potenza consumata dalla macchina. Da qui si trova

$$P_\mathrm{f} = P\frac{T}{T_\mathrm{a} - T},$$

dove il fattore $T/(T_\mathrm{a} - T)$ è noto come efficienza (o COP, "Coefficient Of Performance"), ed è l'analogo del rendimento di una macchina di Carnot per un frigorifero. Tale potenza deve bilanciare la potenza termica P_t trasmessa dall'ambiente al frigorifero tramite conduzione. Per la legge di Fourier, tale potenza è direttamente proporzionale alla differenza di temperatura, perciò si ha

$$P_\mathrm{t} = k(T_\mathrm{a} - T),$$

dove k è una costante di proporzionalità. Eguagliando P_t e P_f si trova dunque

$$k(T_\mathrm{a} - T) = P\frac{T}{T_\mathrm{a} - T}.$$

La stessa equazione vale per la nuova temperatura T' e potenza P' del frigorifero:

$$k(T_\mathrm{a} - T') = P' \frac{T_1}{T_\mathrm{a} - T'}.$$

Prendendo il rapporto delle due equazioni, troviamo

$$\frac{T_\mathrm{a} - T'}{T_\mathrm{a} - T} = \frac{P'}{P} \frac{T'(T_\mathrm{a} - T)}{T(T_\mathrm{a} - T')} \implies P' = P \frac{T(T_\mathrm{a} - T')^2}{T'(T_\mathrm{a} - T)^2}.$$

Risposta: $\boxed{1.0205 \times 10^2\ \mathrm{W}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

Il progetto è sponsorizzato da