Finale nazionale 2023 — Soluzioni

Gara a Squadre di Fisica

14 aprile 2023

Il progetto è sponsorizzato da

BRILLIANT CASIO AIF

Materiale elaborato dalla collaborazione fra

Gruppo OliFis e Gruppo GaS
La lista dei collaboratori è reperibile all'indirizzo `https://gas.olifis.it/#/about-us/`

NOTA BENE
Il seguente materiale è distribuito secondo la licenza CC-BY-NC. È possibile utilizzare, riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico questo materiale alle due seguenti condizioni: citare la fonte; non usare il materiale, nemmeno parzialmente, per fini commerciali. I dettagli della licenza CC-BY-NC si possono leggere all'url `https://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.0/it/`.

$\mathcal{P}$1 Bicchiere d'acqua nell'oceano

Calcoliamo per prima cosa il volume degli oceani: esso è un sottile strato di spessore medio $h = 4\,\mathrm{km}$ su una sfera di raggio R_T, dunque il suo volume è $V_{\text{mare}} = f 4\pi R_T^2 h$, dove $f = 0.7$. Indicando con M_{a} la massa molecolare dell'acqua, il numero di molecole di acqua nel mare è $N = N_A V_{\text{mare}} \rho_{\text{a}} / M_{\text{a}}$, mentre quelle nel bicchiere sono $n = N_A V \rho_{\text{a}} / M_{\text{a}}$. La probabilità che una molecola raccolta a caso nel mare sia stata la prima volta nel bicchiere è n/N. Il numero di molecole raccolte nel bicchiere che c'erano già state in precedenza è dunque n^2/N.
Nonostante la natura probabilistica del problema, la richiesta è ben posta. Infatti, l'errore massimo consentito corrisponde ad un intervallo molto più largo delle fluttuazioni statistiche del numero di molecole ($\sim \sqrt{n^2/N}$).

Risposta: $\boxed{3.16503.}$ *Errore massimo consentito:* 4.0%.

$\mathcal{P}$2 Molla oscillante

Detta k la costante elastica della molla e L_0 la sua lunghezza a riposo, il periodo delle oscillazioni vale $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, mentre la lunghezza all'equilibrio L è tale che $k(L - L_0) = mg$. Combinando le due equazioni, otteniamo

$$L = L_0 + \frac{g}{4\pi^2} T^2.$$

Possiamo dunque eseguire un fit lineare tra le variabili L e T^2: la pendenza della retta moltiplicata per 4π fornirà il valore dell'accelerazione di gravità g. Si noti che questa procedura consente di ignorare i dati sulle masse e di evitare di ricavare, come passaggio intermedio, il valore di k.

Risposta: $\boxed{3.06212\,\mathrm{m/s^2}.}$ *Errore massimo consentito:* 1.0%.

$\mathcal{P}$3 Tetraedro e campo magnetico

Notiamo preliminarmente che la configurazione è simmetrica rispetto a rotazioni di 120° attorno a un asse verticale passante per il vertice superiore del tetraedro. Le correnti nei fili obliqui devono quindi essere uguali, in intensità e verso. Segue che queste correnti sono necessariamente nulle: se così non fosse, nel vertice superiore verrebbe a trovarsi un pozzo o una sorgente di corrente, ma questo violerebbe il principio di conservazione della carica elettrica. Attorno alla faccia appoggiata, invece, scorre una corrente non nulla causata dall'induzione elettromagnetica. Infatti, il flusso del campo magnetico attraverso la faccia inferiore del tetraedro varia linearmente nel tempo: $\Phi(\vec{B}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\lambda t$, dove λ è il tasso di variazione del campo magnetico e ℓ è la lunghezza di un lato. Per la Legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ha quindi una f.e.m. indotta $\mathcal{E}$ che genera la corrente: $|\mathcal{E}| = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\lambda$.
La resistenza equivalente della maglia si trova con la seconda legge di Ohm, conoscendo la resistività ρ e la sezione s del filo: $R = 3\rho\ell/s$. Applicando la prima legge di Ohm, si trova infine la corrente che scorre nel filo:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{s\ell\lambda}{\rho}.$$

Risposta: $\boxed{3.39618\,\mathrm{mA}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}4$ Bombola particolare

Siano α il coefficiente di dilatazione termica, $p_{\text{lim}} = 15\,\text{atm}$, $p_i = 10\,\text{atm}$ e $T_0 = 300\,\text{K}$. Quando la temperatura viene aumentata di ΔT, lo spessore delle pareti della bombola aumenta di un fattore $1 + \alpha\Delta T$, mentre il suo volume aumenta di un fattore $(1 + \alpha\Delta T)^3$. Per la legge dei gas perfetti, la pressione del gas in funzione di ΔT vale quindi $p_i(1 + \Delta T/T_0)(1 + \alpha\Delta T)^{-3}$. Per trovare il punto di rottura, dobbiamo eguagliare questa pressione a quella massima che la bombola può sopportare:

$$p_i(1 + \Delta T/T_0)(1 + \alpha\Delta T)^{-3} = (p_{\text{lim}} - p_0)(1 + \alpha\Delta T) + p_0.$$

Questa è una equazione polinomiale di quarto grado in ΔT, e deve essere dunque risolta numericamente. È possibile applicare metodi iterativi espliciti, quali il metodo di bisezione, oppure ricorrere ad opportune funzioni delle calcolatrici per la soluzione numerica di equazioni.

Risposta: $\boxed{411.88751\,\text{K}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}5$ Strano pianeta

Sia $M(r)$ la massa contenuta in una sfera di raggio r concentrica al pianeta. Applicando il teorema di Gauss per distribuzioni a simmetria sferica, la forza di gravità che agisce su un corpo di massa m posto sul piano dell'equatore, a distanza r dal centro, vale $F_g = GM(r)m/r^2$. A causa della rotazione del pianeta, la forza centrifuga che agisce sullo stesso corpo vale $F_c = m\omega^2 r$, dove ω è la velocità angolare del pianeta. Dunque, per la seconda legge della dinamica,

$$ma = F_g - F_c = \frac{GM(r)m}{r^2} - m\omega^2 r,$$

dove a è l'accelerazione percepita, che, come specificato nel testo, è costante. Segue che

$$M(r) = \frac{ar^2 + \omega^2 r^3}{G}.$$

Ricordando che $M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r')\,\mathrm{d}r'$ e derivando la funzione $M(r)$ rispetto alla variabile r, si trova

$$\rho(r) = \frac{3\omega^2}{4\pi G} + \frac{a}{2\pi G r}.$$

La soluzione si ottiene valutando questa espressione in corrispondenza del raggio del pianeta, cioè a $r = R$.

Risposta: $\boxed{4769.40195\,\text{kg}/\text{m}^3.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}6$ Buco sulla ISS

La portata d'aria che esce dal foro è

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\rho A v,$$

dove M è la massa d'aria nella stazione, ρ è la densità dell'aria, A è l'area del foro e v è la velocità del flusso d'aria. L'unica combinazione dimensionalmente corretta che lega v alle variabili intensive del gas è $v \propto \sqrt{p/\rho}$, dove p è la pressione. Essendo in presenza di un'espansione libera, la temperatura dell'aria nella stazione non varia. Di conseguenza, per la legge dei gas perfetti, anche p/ρ, e quindi v, è costante. Sia M che ρ sono proporzionali alla pressione del gas. L'equazione della portata ha dunque come soluzione un'esponenziale del tipo

$$p(t) = p(0)e^{-\alpha t},$$

dove $\alpha \propto A$. Se il diametro del foro duplicasse, l'area A quadruplicherebbe e dunque, a un tempo t fissato, il rapporto $p(t)/p(0)$ diventerebbe la quarta potenza. La risposta è dunque 0.5^4.

Risposta: $\boxed{0.06250.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}7$ Pendolo rotante

Sulla massetta agiscono due forze: la forza peso $m\vec{g}$ e la tensione del filo $\vec{T}$. Imponendo che la risultante sia pari alla forza centripeta necessaria per mantenere l'oggetto in moto circolare uniforme, abbiamo

$$T\cos\theta = mg, \qquad T\sin\theta = m\omega^2\ell\sin\theta,$$

da cui $\cos\theta = \frac{g}{\omega^2\ell}$, cioè $\cos\theta \propto T^2$. Dato che il periodo si dimezza, se θ_1 è il nuovo valore dell'angolo formato con la verticale, abbiamo $\cos\theta_1 = \frac{1}{4}\cos\theta_0$.

Risposta: $\boxed{75.90132\,^\circ.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}8$ Resistenza che si scalda

La potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza è $R(1+\alpha\Delta T)I^2$, dove $R = 40\,\Omega$, ΔT è la differenza di temperatura tra l'ambiente e la resistenza, α è il coefficiente termico e $I = 100\,\mathrm{mA}$. Nello stato stazionario, questa potenza dovrà eguagliare quella trasmessa per conduzione dalla resistenza all'ambiente, cioè $\Delta T/R_{\mathrm{Th}}$, dove R_{Th} è la resistenza termica. Ricaviamo dunque

$$\Delta T = \frac{RI^2}{R_{\mathrm{Th}}^{-1} - \alpha IR}.$$

L'errore percentuale sulla misura vale $100\alpha\Delta T$.

Risposta: $\boxed{8.94196.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}9$ Volo al polo nord

Calcoliamo per prima cosa la velocità v di lancio, imponendo che in orbita circolare ci sia l'equilibrio tra le forze:

$$\frac{GM_\oplus m}{R_\oplus^2} = \frac{mv^2}{R_T} \implies v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}},$$

dove m è la massa del razzo. L'energia totale del razzo vale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_\oplus m}{R_\oplus} = -\frac{GM_\oplus m}{2R_\oplus}.$$

Poiché l'energia in un'orbita ellittica è $-\frac{GMm}{2a}$ dove a è il semiasse maggiore dell'ellisse, si ricava che $a = R_\oplus$ nel nostro caso. Dalla seconda e dalla terza legge di Keplero è possibile trovare che il tempo in cui il raggio vettore spazza un'area pari ad A è

$$t = \frac{2mA}{L},$$

dove L è il momento angolare dell'orbita. A questo punto, facciamo le seguenti osservazioni.

- Per simmetria, il semiasse maggiore deve essere inclinato di 45° rispetto all'asse terrestre.
- Per le proprietà geometriche dell'ellisse, ogni suo punto ha la somma delle distanze dai fuochi pari all'asse maggiore. Ciò significa che il punto di lancio dista anche R_T dal secondo fuoco (il primo è il centro della Terra). Se ne deduce che l'asse minore è il segmento che congiunge polo Nord e punto di lancio dall'equatore.
- Dall'osservazione precedente, si deduce che per simmetria l'angolo di lancio è di 45°.

Dunque il momento angolare vale $L = mvR_T/\sqrt{2}$. La figura spazzata nell'orbita dal raggio vettore è pari a una semiellisse (di area $\frac{\pi}{2}ab$ con $b = \sqrt{2}R_T$) più un triangolo rettangolo isoscele con i vertici nei punti di lancio, atterraggio e centro della Terra (di area $R_\oplus^2/2$). A questo punto, per trovare il tempo di volo è sufficiente sostituire i valori dell'area e del momento angolare nella relazione scritta precedentemente.

Risposta: $\boxed{1.02031\,\text{ore.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$10 Corda su una sfera

Per prima cosa, è abbastanza intuitivo convincersi che l'unica posizione in cui la corda può restare ferma è quella in cui essa forma una circonferenza che giace in un piano orizzontale. Consideriamo ora un segmentino infinitesimo di corda. Su di esso agiscono 3 forze: il peso, la reazione della sfera e la tensione della corda. Supponiamo che tale segmentino sottenda un angolo al centro $\mathrm{d}\theta$ della circonferenza formata dalla corda. La sua massa sarà $\mathrm{d}m = \frac{m\,\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. La forza peso ha modulo $\mathrm{d}m\,g$ ed è rivolta verso il basso; la reazione della sfera è ortogonale alla sua superficie ed ha modulo ignoto; la risultante della tensione della corda è orizzontale e punta verso l'interno della sfera.
Con un ragionamento puramente geometrico, ci si può convincere che la tensione della corda causa una risultante di modulo $T\,\mathrm{d}\theta$. Per ottenere questo risultato è sufficiente pensare, invece che a una circonferenza, a un poligono regolare con lati che sottendono un angolo $\mathrm{d}\theta$ al centro, che applicano ai lati adiacenti una forza T rivolta lungo i primi. L'angolo che un segmento congiungente il centro della sfera a un punto della corda forma con la verticale vale $\alpha = \arcsin\left(\frac{\ell}{2\pi r}\right)$. Imponendo che la reazione sia ortogonale alla superficie, si ottiene la condizione cercata sulla tensione: $\tan\alpha = \frac{T\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}m\,g}$, da cui è possibile ricavare

$$T = \frac{mg}{2\pi}\tan\left(\arcsin\left(\frac{\ell}{2\pi r}\right)\right).$$

Risposta: $\boxed{1.17150\,\text{N.}}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$11 Esagono di resistenze

Immaginiamo di "spezzare" la resistenza in alto (e allo stesso modo quella in basso) in due resistenze in serie da $0.5\,\Omega$. Per simmetria, nel punto intermedio tra le due resistenze, il valore del potenziale sarà pari al valore del potenziale nel centro dell'esagono (e pari alla media aritmetica del potenziale in A e di quello in B). Possiamo dunque cortocircuitare questo punto intermedio con il centro dell'esagono, e applicare le leggi della serie e del parallelo per risolvere separatamente la parte "destra" e quella "sinistra" del circuito.

Risposta: $\boxed{0.80000\,\Omega.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$12 Fotoni da una stella

Definendo $E' = E/1\,\mathrm{lm}$, l'energia totale incidente è il prodotto tra l'area della pupilla $\pi d^2/4$ e il flusso luminoso Φ. Ciascun fotone incidente ha energia $h\nu = hc/\lambda_0$. Dunque,

$$N = \frac{\frac{\pi}{4} d^2\, \Phi\, E'}{\frac{hc}{\lambda_0}}.$$

Risposta: $\boxed{56276.60708\,\mathrm{s}^{-1}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$13 Urto relativistico

Dette p_1, E_1 e p_f, E_f le quantità di moto e le energie rispettivamente della prima particella prima dell'urto e dell'unica particella dopo l'urto, dai principi di conservazione segue che

$$p_1 = p_f, \qquad E_1 + E_2 = E_f,$$

dove E_2 è l'energia a riposo della particella ferma. Ricordando le relazioni che legano energia, quantità di moto, velocità e massa, l'equazione da risolvere è

$$\sqrt{m_1^2 c^4 + p_1^2 c^2} + m_2 c^2 = \sqrt{m_f^2 c^4 + p_f^2 c^2},$$

con $p_1 = p_f = \frac{m_1 v}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Risolvendo per m_f, si trova

$$m_f = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \frac{2 m_1 m_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Risposta: $\boxed{4.22022\,\mathrm{GeV/c^2}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$14 Quanto vale uno StatCoulomb?

Per risolvere il problema, bisogna trovare una coppia di cariche q che, poste ad una distanza $r = 1\,\mathrm{cm}$, generano una forza repulsiva pari a $F = 1\,\mathrm{dyne} = 10^{-5}\,\mathrm{N}$. Usando la legge di Coulomb,

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \implies q = r\sqrt{4\pi F \epsilon_0}.$$

Risposta: $\boxed{0.33356\,10^{-9}\,\mathrm{C}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$15 Miraggi ed iceberg

Si noti che, se l'iceberg è molto vicino, allora viene visto senza problemi; se, invece, è lontano, la luce che parte da esso viene deviata per rifrazione e potrebbe non raggiungere l'osservatore, essendo deflessa verso l'alto. In particolare, considereremo, per reversibilità dei cammini ottici, che sia l'osservatore a emettere luce e ci chiederemo a quale distanza l'iceberg non venga colpito da tale luce. Un'osservazione

importante che si può fare da subito è che la luce che va più lontano è quella che parte orizzontale dall'osservatore.
Per prima cosa, serve ricordare che la legge di Snell si può applicare anche tra strati non consecutivi. Ovvero, dato un certo numero di strati paralleli con indici di rifrazione n_k, allora, ipotizzando che la luce raggiunga effettivamente il k-esimo strato, vale $n_0 \sin\theta_0 = n_k \sin\theta_k$, dove θ_k è l'angolo di incidenza sul k-esimo strato. Nel nostro caso gli strati sono orizzontali e, detta $h'(x)$ la pendenza del raggio di luce quando è a distanza x dall'osservatore, la legge di Snell scritta sopra diventa:

$$n(0)\sin\theta_0 = n_0 = n(h(x))\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arctan h'(x)\right).$$

Con delle identità trigonometriche, possiamo ricavare $h'(x)$. Sostituendo poi la formula per $n(h)$, si ottiene:

$$h'(x) = \sqrt{\left(1 + \frac{h(x)}{h_0}\right)^2 - 1}.$$

Per risolvere questa equazione differenziale, è utile portarla in una forma simile all'integrale fornito nel testo, ad esempio ponendo $y = 1 + h/h_0$, in modo da avere

$$y'h_0 = \sqrt{y^2 - 1} \implies \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{\mathrm{d}x}{h_0} \implies \cosh^{-1} y = \frac{x - x_0}{h_0}.$$

La condizione $h(0) = 0$ fissa la costante di integrazione, $x_0 = 0$. A questo punto, è sufficiente sostituire $h = 100\,\mathrm{m}$ e calcolare il corrispondente valore di x.

Risposta: $\boxed{1413.03770\,\mathrm{m}.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

$\mathcal{P}$16 Giro della morte di un corpo rigido

La guida esercita una reazione normale N che è sempre diretta verso il centro. Guardando quindi la componente radiale delle forze, deve valere

$$Mg\cos\theta - N = -M\frac{v(\theta)^2}{R-r},$$

dove $v(\theta)$ è la velocità dell'oggetto in funzione dell'angolo con la verticale θ. Questa equazione si può scrivere come

$$0 \leq N = M\left(g\cos\theta + \frac{v(\theta)^2}{R-r}\right).$$

Dobbiamo ora trovare la funzione $v(\theta)$. Poiché il moto è di puro rotolamento, l'energia si conserva, dunque

$$\frac{1}{2}(1+\beta)Mv_0^2 - Mg(R-r) = \frac{1}{2}(1+\beta)Mv(\theta)^2 - Mg(R-r)\cos\theta,$$

che può essere risolta per $v(\theta)$:

$$v(\theta)^2 = v_0^2 + 2g\frac{R-r}{1+\beta}(\cos\theta - 1).$$

Questa espressione si può inserire nella disequazione precedente, ottenendo

$$0 \leq g\cos\theta + \frac{v_0^2}{R-r} + \frac{2g}{1+\beta}(\cos\theta - 1).$$

Il valore di θ che rende più difficile soddisfare la disequazione è $\theta = \pi$, che corrisponde ovviamente al punto più alto della guida. In questo caso si ha

$$1 + \frac{4}{1+\beta} \leq \frac{v_0^2}{g(R-r)},$$

che porta al valore limite $\beta = \frac{a-5}{1-a}$, dove abbiamo definito la quantità adimensionale $a = \frac{v_0^2}{g(R-r)}$.

Risposta: $\boxed{0.76749.}$ *Errore massimo consentito:* 0.5%.

Il progetto è sponsorizzato da

BRILLIANT CASIO AIF